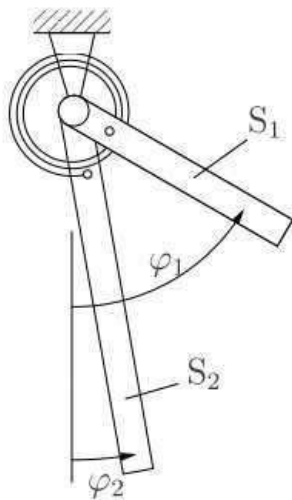


MM 112 Modellierung, Simulation und Optimierung mechatronischer Systeme	Anfang WS 2012/13	Seite 2 / 4
Dauer: 90 Minuten	Maximalpunktzahl: 80	Prof. Dr. K. Lebert

- b) Führen sie als Zustandsgrößen die Spannungen an den Kondensatoren sowie den Strom durch die Spule ein. Wie viele Zustandsgrößen  $x_i(t)$  erhalten sie und welche Dimension hat damit ihr Zustandsraummodell? (1P)
- c) Geben sie nun jeweils eine Differentialgleichung erster Ordnung für jede Zustandsgröße an, so dass gilt:  $\frac{d x_i(t)}{d t} = f(x_1(t), \dots, x_n(t), u_{\text{in}}(t)); \quad i = 1, \dots, n$  (6P)
- d) Stellen sie ein vollständiges Zustandsraummodell mit den entsprechenden Matrizen und Vektoren auf! (4P)

### Aufgabe 3: Lagrange-Gleichungen zweiter Art (21 P)



Zwei dünne, homogene Stangen  $S_1$  und  $S_2$  mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  und den Längen  $l_1$  und  $l_2$  sind an ihrem Ende in einem gemeinsamen Punkt drehbar aufgehängt und unabhängig voneinander beweglich. Zwischen ihnen ist eine Drehfeder mit der Federkonstanten  $c$  angebracht, die bei  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  völlig entspannt ist. Gegeben sind die Massen, die Längen der Stäbe, die Federsteifigkeit sowie die Gravitationskonstante  $g$ . Auf Grund der Homogenität liegen die Schwerpunkte der Stäbe jeweils in der Mitte der Stäbe und sind nicht explizit eingezeichnet.

- a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das System? Was sind dann geeignete verallgemeinerte Koordinaten? (2P)
- b) Stellen sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten auf! (3P)
- c) Stellen sie die Gleichung für die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten auf. (3P)
- d) Kombinieren sie ihre Ergebnisse aus a) bis c) und stellen sie die Lagrangefunktion in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten auf. (2P)

#### Anmerkung:

Sollten sie Aufgabenteil d) nicht gelöst haben, so rechnen sie mit folgender Lagrangefunktion weiter:

$$L = \frac{1}{6} [m_1 l_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2(t) + m_2 l_2^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2(t)] + \frac{1}{2} g [l_1 m_1 \cos \varphi_1(t) + l_2 m_2 \cos \varphi_2(t)] - \frac{1}{2} c \left( [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]^2 + \pi \left[ \varphi_2(t) - \varphi_1(t) + \frac{\pi}{4} \right] \right)$$

- e) Leiten sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten ab. (8P)
- f) Welcher Zusammenhang zwischen den beiden Winkeln  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ergibt sich für den stationären Zustand (System ist in Ruhe). (3P)

**Anmerkung:** Gesucht ist eine Gleichung, die einen Zusammenhang beschreibt!

MM 112 Modellierung, Simulation und Optimierung mechatronischer Systeme	Anfang WS 2012/13 Lösung	Seite 3 / 6
Dauer: 90 Minuten	Maximalpunktzahl: 80	Prof. Dr. K. Lebert

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_1 C_2} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (3P)$$

Ausgangsgleichung:  $y(t) = u_{\text{out}}(t) = R_2 i_2(t) = R_2 x_3(t)$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (1P)$$

### Aufgabe 3: Lagrange-Gleichungen zweiter Art (21P)

a) Anzahl der Freiheitsgrade: 2

Geeignete verallgemeinerte Koordinaten:  $\phi_1(t)$  und  $\phi_2(t)$ .

b) Kinetische Energie

Trägheitsmomente bezüglich der Momentanpole mit Hilfe des Satzes von Steiner:

$$J_{\text{Stab1}, P} = J_{\text{Stab1}, S} + m_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 + \frac{1}{4} m_1 l_1^2 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2$$

$$J_{\text{Stab2}, P} = J_{\text{Stab2}, S} + m_2 \cdot \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1^2(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2(t) = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1^2(t) + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2(t)$$

c) Stellen sie die Gleichung für die potentielle Energie des Systems auf:

Gravitation Stäbe:

$$E_{\text{pot},1} = m_1 \cdot g \cdot y_{S,1}(t) + m_2 \cdot g \cdot y_{S,2}(t) = -m_1 \cdot g \cdot \frac{l_1}{2} \cos \phi_1(t) - m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \cos \phi_2(t)$$

Ansatz für die Feder:  $E_{\text{pot},2} = \frac{1}{2} c \cdot \Delta \phi^2(t) = \frac{1}{2} c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) - \frac{\pi}{2} \right]^2$

Damit:  $E_{\text{pot}} = -m_1 \cdot g \cdot \frac{l_1}{2} \cos \phi_1(t) - m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \cos \phi_2(t) + \frac{1}{2} c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) - \frac{\pi}{2} \right]^2 \quad (3P)$

d) Kombinieren sie ihre Ergebnisse aus a) bis d) und stellen sie die Lagrangefunktion in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten auf: (2P)

MM 112 Modellierung, Simulation und Optimierung mechatronischer Systeme	Anfang WS 2012/13 Lösung	Seite 4 / 6
Dauer: 90 Minuten	Maximalpunktzahl: 80	Prof. Dr. K. Lebert

Einsetzen der Ergebnisse:

$$L = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1^2(t) + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2(t) + m_1 \cdot g \cdot \frac{l_1}{2} \cos \phi_1(t) + m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \cos \phi_2(t) - \frac{1}{2} c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) - \frac{\pi}{2} \right]^2$$

- e) Leiten sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten ab.

Algorithmus nach Lagrange für ein System ohne verallgemeinerte Kräfte:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Verallgemeinerte Koordinate  $q = \phi_1(t)$  :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \dot{\phi}_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \ddot{\phi}_1(t) \quad (1P)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_1} = -m_1 \cdot g \cdot \frac{l_1}{2} \sin \phi_1(t) - c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) \right] + \frac{1}{2} c \pi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_1} = -m_1 \cdot g \cdot \frac{l_1}{2} \sin \phi_1(t) - c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (2P)$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{1}{3} m_1 l_1^2 \ddot{\phi}_1(t) + m_1 \cdot g \cdot \frac{l_1}{2} \sin \phi_1(t) + c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) - \frac{\pi}{2} \right] = 0 \quad (1P)$$

Verallgemeinerte Koordinate  $q = \phi_2(t)$  :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} \right) = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2(t) \quad (1P)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_2} = -m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \sin \phi_2(t) + c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) \right] - \frac{1}{2} c \pi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_2} = -m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \sin \phi_2(t) + c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) - \frac{\pi}{2} \right]$$

(2P)

Bewegungsgleichung:

$$\frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2(t) + m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \sin \phi_2(t) - c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) - \frac{\pi}{2} \right] = 0 \quad (1P)$$

- f) Für die Ruhelage gilt:

$$\dot{\phi}_1(t) = \dot{\phi}_2(t) = 0$$

damit:  $m_1 \cdot g \cdot \frac{l_1}{2} \sin \phi_1(t) + c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) - \frac{\pi}{2} \right] = 0$

MM 112 Modellierung, Simulation und Optimierung mechatronischer Systeme	Anfang WS 2012/13 Lösung	Seite 5 / 6
Dauer: 90 Minuten	Maximalpunktzahl: 80	Prof. Dr. K. Lebert

und  $m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \sin \phi_2(t) - c \left[ \phi_1(t) - \phi_2(t) - \frac{\pi}{2} \right] = 0$

Addition der beiden Gleichungen liefert:  $m_1 \cdot g \cdot \frac{l_1}{2} \sin \phi_1(t) + m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \sin \phi_2(t) = 0$  (3P)

#### Aufgabe 4: Identifikation eines dynamischen Systems (20P)

a) Tabelle der Messwerte: (2P)

Messwert $k$	Eingangssignal $u$	Ausgangssignal $y$
0	1	0
1	1	3
2	-0,5	1,5
3	-0,5	-2,25
4	0	-0,375
5	0	0,1875

b) Nichtrekursive Methode der kleinsten Fehlerquadrate für ein System erster Ordnung  
Stellen sie die dafür notwendigen Matrizen und Vektoren auf. (5P).

$$\underline{\Theta}'^T = [a_1 \quad b_1]$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1,5 & -0,5 \\ 2,25 & -0,5 \\ 0,375 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1,5 \\ -2,25 \\ -0,375 \\ 0,1875 \end{bmatrix}$$

c) Rekursive Least-Squares Schätzung

Machen sie Vorschläge für die notwendigen Anfangsbedingungen für ihren Parametervektor und ihre Matrix  $P$ . Achten sie dabei auf die richtigen Dimensionen!

$$\underline{\Theta}'^T = [0 \quad 0] \quad \text{Anfangsbedingung für die Parameter } a_1, b_1 \quad (1P)$$

$$P = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \alpha = 100 \quad (2P)$$

d) Mit welchen Werten für  $\underline{\Psi}$  und  $y$  füttern sie den rekursiven Algorithmus im ersten und im zweiten Schritt?

Wegen der zugrunde liegenden Messgleichung lautet die Gleichung im ersten Schritt:

$$y(1) = -a_1 y(0) + b_1 u(0)$$

$$\text{Und damit: } \underline{\Psi}^T = [-y(0) \quad u(0)] = [0 \quad 1]$$

$$\text{Und als zugehörige Messung des Ausgangssignals: } y = y(1) = 3 \quad (3P)$$

Entsprechend gilt für den zweiten Schritt:

$$y(2) = -a_1 y(1) + b_1 u(1)$$

$$\text{Und damit: } \underline{\Psi}^T = [-y(1) \quad u(1)] = [-3 \quad 1]$$

$$\text{Und als zugehörige Messung des Ausgangssignals: } y = y(2) = 1,5 \quad (3P)$$

e) Berechnung der Parameter ohne Verwendung der Least-Squares-Schätzalgorithmen:

$$\text{Gleichung 1: } y(1) = -a_1 y(0) + b_1 u(0) = -a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 = b_1 = 3 \quad (2P)$$