

#### 4.6.4 Maximaler Energiegewinn im heliozentrischen System

Betrachtet wird nun die Änderung der Energie des Raumflugkörpers im heliozentrischen System, welche aus dem Gravity-Assist-Manöver resultiert:

$$\Delta E = \frac{1}{2} v_5^2 - \frac{\mu_s}{r_5} - \left( \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{\mu_s}{r_2} \right) . \quad (4.118)$$

Da die Differenz der Sonnenabstände bei Ein- und Austritt des Raumflugkörpers vernachlässigbar klein ist ( $r_2 - r_5 \approx 0$ ), folgt

$$\Delta E \approx \frac{1}{2} (v_5^2 - v_2^2) . \quad (4.119)$$

Mit  $v_5^2$  aus Gl. (4.111) und unter Verwendung von Gl. (4.114) lässt sich der Energiegewinn als Funktion zweier Parameter  $x$  und  $\beta_1$  formulieren:

$$\Delta E = v_P \sqrt{\frac{\mu_P}{r_{\text{Peri}}}} \frac{2x}{(1+x^2)^2} \left( x \sqrt{2+x^2} \sin \beta_1 - \cos \beta_1 \right) , \quad (4.120)$$

mit 
$$x = \sqrt{\frac{r_{\text{Peri}}}{\mu_P}} v_3 . \quad (4.121)$$

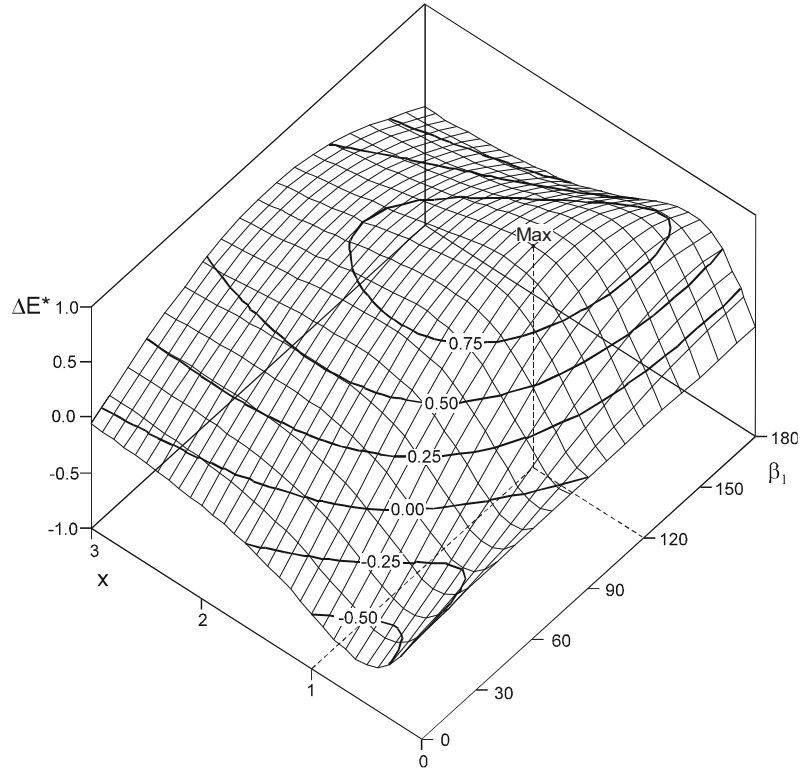
Der normierte Energiegewinn

$$\Delta E^* = \frac{\Delta E}{v_P \sqrt{\frac{\mu_P}{r_{\text{Peri}}}}} , \quad (4.122)$$

ist in Abb. 4.31 als Funktion von  $x$  und  $\beta_1$  dargestellt. Die eingezeichnete Linie  $\Delta E^* = 0$  grenzt den Bereich des Energiegewinns von dem des Energieverlustes ab, d. h. für kleine Werte von  $(x, \beta_1)$  wirkt das Gravity-Assist-Manöver nicht als Beschleunigungs-, sondern als Bremsmanöver. Man kann zeigen, dass der Raumflugkörper beim Vorbeiflug hinter dem Planeten ( $\beta_1$  groß) relativ zur Sonne beschleunigt wird bzw. beim Vorbeiflug vor dem Planeten abgebremst wird. Es gibt außerdem einen Punkt M, für den der Energiegewinn maximal wird. Aus

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial x} = \frac{\partial \Delta E}{\partial \beta_1} = 0 , \quad (4.123)$$

folgt für dieses Maximum  $\beta_{1,\text{max}} = 120^\circ, x_{\text{max}} = 1 . \quad (4.124)$



**Abb. 4.31.** Normierter Energiegewinn  $\Delta E^*$ , aufgetragen über  $x$  und  $\beta_1$ .

Somit kann für gegebene Größen  $M_P$ ,  $r_{\text{Peri}}$  und  $v_P$  auch die Anfluggeschwindigkeit bestimmt werden, für die das Gravity-Assist-Manöver den maximalen Energiegewinn bringt

$$v_{3,\text{max}} = \sqrt{\frac{\mu_P}{r_{\text{Peri}}}} \quad . \quad (4.125)$$

Einsetzen der Maximalwerte in Gl. (4.120) ergibt den Betrag dieses Energiegewinns zu

$$\Delta E_{\text{max}} = v_P \sqrt{\frac{\mu_P}{r_{\text{Peri}}}} = v_P v_{3,\text{max}} \quad . \quad (4.126)$$

In der Tabelle 4.1 sind für die Daten des Planetensystems die maximal möglichen Energieänderungen dargestellt. Daraus folgt, dass ein Gravity-Assist-Manöver mit dem Planeten Jupiter die größte Energieänderung hervorrufen kann, mit der Venus die zweitgrößte, usw. (Rangfolge siehe ganz rechte Spalte).

Planet	Geschwind. $v_P$ [km/s]	Masse $M_P$ [kg]	Entf. zur Sonne $r_P$ [ $10^6$ km]	Einfluss- sphäre $r_E$ [ $10^6$ km]	$r_{\text{peri}}$ [km] $\approx$ Äquatorra- dius	$v_{3,\text{extr}}$ [km/s]	$\Delta \varepsilon_{\text{max}}$ [J/kg]	
Merkur	47,87	$3,28 \cdot 10^{23}$	57,9	0,024	2.439	2,99	$1,43 \cdot 10^8$	5
Venus	35,02	$4,87 \cdot 10^{24}$	108,2	0,169	6.051	7,33	$2,57 \cdot 10^8$	2
Erde	29,78	$5,97 \cdot 10^{24}$	149,6	0,259	6.378	7,90	$2,35 \cdot 10^8$	4
Mars	24,13	$6,42 \cdot 10^{23}$	228,0	0,130	3.394	3,55	$0,86 \cdot 10^8$	8
Ceres	17,9	$1,20 \cdot 10^{21}$	414,4	0,010	525	0,4	$0,07 \cdot 10^8$	9
Jupiter	13,06	$1,90 \cdot 10^{27}$	778,4	24,05	71.400	42,1	$5,50 \cdot 10^8$	1
Saturn	9,648	$5,69 \cdot 10^{26}$	1.425,5	24,10	60.000	25,2	$2,43 \cdot 10^8$	3
Uranus	6,799	$8,68 \cdot 10^{25}$	2.870,4	18,96	25.650	15,0	$1,02 \cdot 10^8$	6
Neptun	5,430	$1,03 \cdot 10^{26}$	4.501,1	32,38	24.780	16,7	$0,91 \cdot 10^8$	7
Pluto	4,7	$1,27 \cdot 10^{22}$	5.900	0,471	1.150	0,86	$0,04 \cdot 10^8$	10

Tabelle 4.1. Max. theoretische Energieänderungen bei Gravity-Assist-Manövern.

#### 4.6.5 Maximierung der Austrittsgeschwindigkeit

Eine andere Fragestellung als bei der Maximierung des Energiezuwachses  $\Delta E$  ergibt sich, wenn bei gegebenen Anflug-Größen  $v_2$  und  $\gamma_1$ , durch geschickte Wahl des Abstandes  $r_{\text{peri}}$  beim Vorbeiflug die Geschwindigkeit  $v_3$ , die der Raumflugkörper nach Verlassen der Einflussosphäre im heliozentrischen System besitzt, maximiert werden soll. Dazu wird Gl. (4.111) noch einmal wiederholt:

$$v_3^2 = v_2^2 + v_P^2 + 2v_2 v_P \cos \beta_2 \quad . \quad (4.111)$$

Durch  $v_2$ ,  $\gamma_1$  und  $v_P$  liegt  $v_3$  nach Gl. (4.108) fest.  $v_3$  wird also maximal für

$$\cos \beta_2 = 1, \text{ d. h. } \beta_2 = 0 \quad . \quad (4.127)$$

Dies bedeutet, dass der Raumflugkörper nach Verlassen der Planetensphäre zunächst parallel zur Planetenbahn weiterfliegt. Gl. (4.111) vereinfacht sich damit zu

$$v_{3,\text{max}} = v_2 + v_P \quad . \quad (4.128)$$

Jetzt bleibt noch der nächste Abstand  $r_{\text{peri}}$ , aus der Bedingung von Gl. (4.127) zu berechnen. Aus der Geometrie einer hyperbolischen Flugbahn folgt

$$r_{\text{peri}} = a(1 - e) = \frac{\mu_P}{v_2^2} (e - 1) \quad , \quad (4.129)$$

mit 
$$e = \frac{1}{\cos \phi} . \quad (4.130)$$

Aus Gl. (4.112) folgt mit  $\beta_2 = 0$

$$\phi = 90^\circ - \frac{\beta_1}{2} , \quad (4.131)$$

$$\cos \phi = \cos \left( 90^\circ - \frac{\beta_1}{2} \right) = \sin \left( \frac{\beta_1}{2} \right) . \quad (4.132)$$

Der Winkel  $\beta_1$  kann aus Gl. (4.114) bestimmt werden. Damit gilt für den nächsten Vorbeiflugabstand zur Maximierung von  $v_5$

$$r_{\text{Peri}} = \frac{\mu_P}{v_3^2} \left[ \frac{1}{\sin(\beta_1/2)} - 1 \right] . \quad (4.133)$$

Dieser Abstand muss natürlich durch geschickte Wahl der Anflugparameter größer als der Planetenradius sein.

Abschließend sei erwähnt, dass viele interplanetare Missionen erst durch die Entdeckung und Beherrschung des Gravity-Assist-Manövers realisiert werden konnten. Dies gilt nicht nur wegen der sonst benötigten großen Zeitspanne zum Erreichen der äußeren Planeten, sondern auch wegen der wesentlichen Reduktion der benötigten Treibstoffmasse, die überhaupt erst eine nennenswerte Nutzlast zulässt. Beispielsweise nutzte die Galileo-Sonde drei solcher Manöver (eines an der Venus, zwei an der Erde), um von der Erde zum Jupiter zu gelangen. Die Voyager 2 Mission, gestartet am 20.08.1977, führte Swingby-Manöver am Jupiter (09.07.1979), Saturn (25.08.1981), Uranus (24.01.1986) und Neptun (25.08.1989) durch und hat dadurch sogar auf Fluchtgeschwindigkeit aus unserem Sonnensystem beschleunigt.

Einige weitere Zahlenbeispiele über die Ersparnis an Antriebsbedarf für verschiedene Missionen sind in Kapitel 4.9 zusammengefasst.