

A2 mit Lagrange-Formalismus

Letzte Verson 20.4.26

Aufgabe 2. Kräftegleichgewicht und Winkelgeschwindigkeit

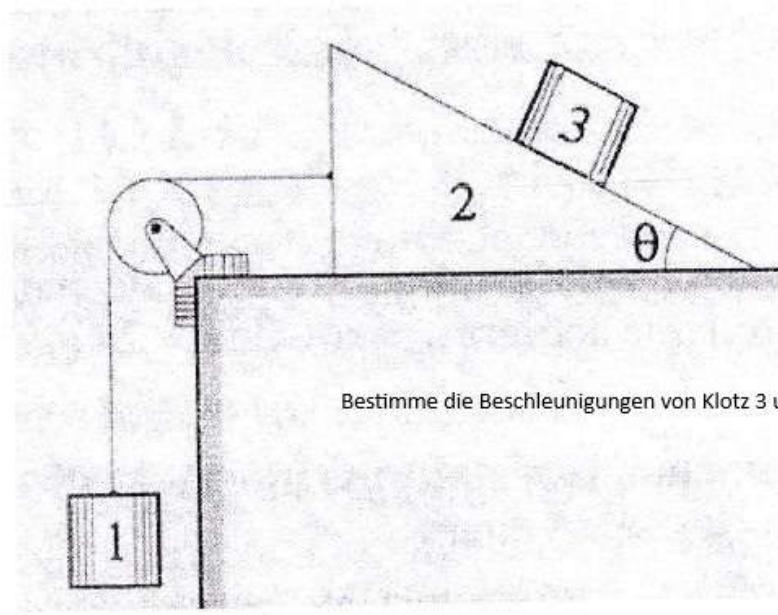
Bestimmen Sie die Beschleunigung vom Klotz 3 (siehe dazu Abbildung 2.1). Vernachlässigen Sie dafür

die Reibung. Rollenmasse und Seilmasse sind auch vernachlässigbar.

$m_1 = 15 \text{ kg}$, $m_2 = 50 \text{ kg}$, $m_3 = 10 \text{ kg}$, $\theta = 37^\circ$.

Hinweis: Setzen Sie für $g = 10 \text{ m/s}^2$ ein, $\sin 37^\circ = 3/5$; $\cos 37^\circ = 4/5$.

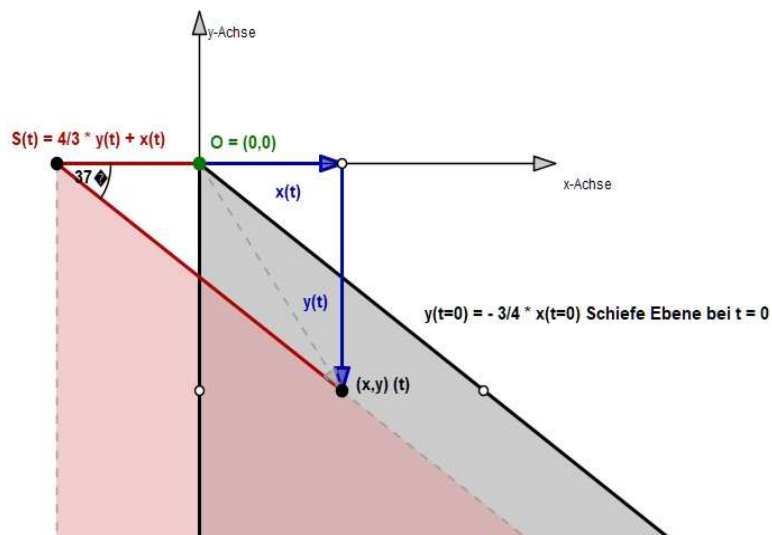
Abbildung 2.1: Massen m_1 , m_2 , m_3 am Seil.



Bestimme die Beschleunigungen von Klotz 3 und Keil 2 im Laborsystem.

Ortsfestes Koordinatensystem

O (0,0) in der Spitze des ruhenden Keils, Positive x-Achse parallel zum Tisch nach rechts, y-Achse senkrecht dazu nach oben.



Bahnkurve des Klotzschwerpunkts und Zwangsbedingung

Für $t < 0$ ist das System fixiert und der Klotzschwerpunkt befindet sich in $O(0,0)$.

Bei $t = 0$ wird das System freigegeben und die Bewegung beginnt.

Für $t > 0$ befindet sich der Klotzschwerpunkt im Punkt (x,y) , in positiver x -Richtung ist er um x verschoben. Der Keil ist in negativer x -Richtung parallel verschoben, wegen der

Zwangsbedingung um $\frac{4}{3} * y + x$. Vergleiche Bild „ortsfestes Koordinatensystem“.

Die Masse m_1 verliert den gleichen Betrag an Höhe.

Klotz m_3 hat dann um y an Höhe verloren.

Geschwindigkeiten

Für m_3 : $\dot{x}, \dot{y}, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{0,5}$

Für m_1 und m_2 : $+\frac{4}{3} * \dot{y} + \dot{x}$, (m_1 in negativer y -Richtung,
 m_2 in negative x -Richtung)

Lagrangefunktion

$$L = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} * (m_1 + m_2) * \left(\frac{4}{3} * \dot{y} + \dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2} * m_3 * (\dot{y}^2 + \dot{x}^2)$$

$$U = m_1 * g * \left(\frac{4}{3} * y + x\right) + m_3 * g * y$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_2 + m_1) * \left(\frac{4}{3} * \ddot{y} + \ddot{x}\right) + m_3 * \ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2} * (m_2 + m_1) * \left(32 * \frac{\ddot{y}}{9} + 8 * \frac{\ddot{x}}{3}\right) + m_3 * \ddot{y}$$

$$\frac{d}{dx} L = - m_1 * g$$

$$\frac{d}{dy} L = - \frac{4}{3} * m_1 * g - m_3 * g$$

Mit den Werten von m_1, m_2, m_3 und $g=10$ erhält man die Gleichungen:

$$G1 : 65 * \left(\frac{4}{3} * \ddot{y} + \ddot{x}\right) + 10 * \ddot{x} + 150 = 0$$

$$G2 : \frac{1}{2} * 65 * \left(32 * \frac{\ddot{y}}{9} + 8 * \frac{\ddot{x}}{3}\right) + 10 * \ddot{y} + 300 = 0$$

$$\ddot{y} = - \frac{1710}{343} \approx - 4,985422741 \quad \ddot{x} = \frac{1290}{343} \approx 3,760932945 \text{ lösen.}$$

Die Keilbeschleunigung ergibt sich daraus zu $-\frac{990}{343} \approx -2,886297376$

Auf der folgenden Seite prüfe ich auf Abweichung vom Energieerhaltungssatz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Überprüfung der Ergebnisse										
2	Zunahme der kinetischen Energie und Abnahme der potentiellen Energie										
3					20.04.26						
4				b_x	b_y	b	B				
5	Beschleunigungs Beträge			3,76093294460641	4,98542274052	6,24492245873	2,88629737609329				
6			$\geq 0^*$	$\leq 0^*$			$\leq 0^*$				
7	Geschwindigkeiten				$v = a \cdot t$						
8	Wegstrecken				$s = 1/2 \cdot a \cdot t^2$						
9			t	Ekin Zunahme			Epot Abnahme			Differenz	
10			0,1	4,65743440233235			4,65743440233236			0	
11			0,2	18,6297376093294			18,6297376093294			0	
12			0,3	41,9169096209912			41,9169096209912			0	
13			0,4	74,5189504373177			74,5189504373178			0	
14			0,5	116,435860058309			116,435860058309			0	
15			0,6	167,667638483965			167,667638483965			0	
16			0,7	228,214285714285			228,214285714286			0	
17			0,8	298,075801749271			298,075801749271			0	
18			0,9	377,252186588921			377,252186588921			0	
19			1	465,743440233235			465,743440233236			0	
20			1,1	563,549562682215			563,549562682216			0	
21			1,2	670,670553935859			670,67055393586			0	
22			1,3	787,106413994168			787,106413994169			0	
23			1,4	912,857142857141			912,857142857142			0	
24			1,5	1047,92274052478			1047,92274052478			0	
25			1,6	1192,30320699708			1192,30320699708			0	
26			1,7	1345,99854227405			1345,99854227405			0	
27			1,8	1509,00874635568			1509,00874635568			0	
28			1,9	1681,33381924198			1681,33381924198			0	
29			2	1862,97376093294			1862,97376093294			0	
30			2,1	2053,92857142857			2053,92857142857			0	
31			2,2	2254,19875077886			2254,19875077886			0	