

## A2 mit Lagrange-Formalismus

### Aufgabe 2. Kräftegleichgewicht und Winkelgeschwindigkeit

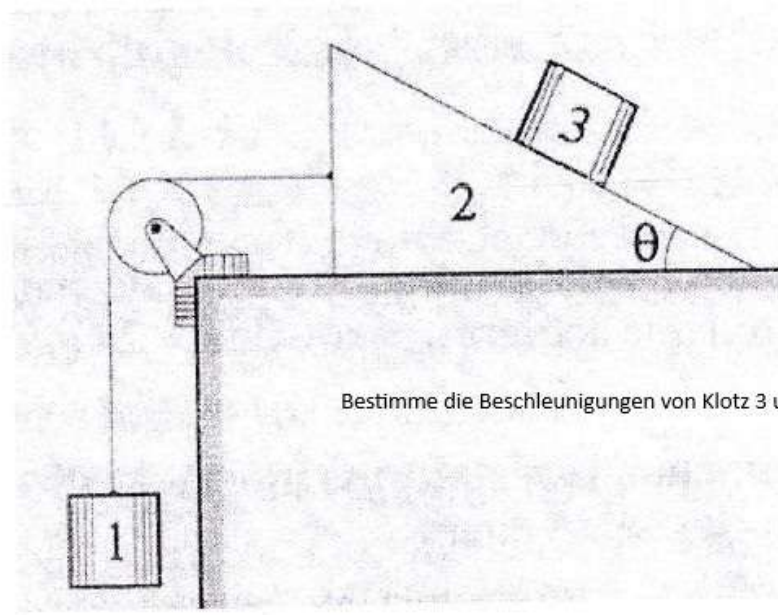
Bestimmen Sie die Beschleunigung vom Klotz 3 (siehe dazu Abbildung 2.1). Vernachlässigen Sie dafür

die Reibung. Rollenmasse und Seilmasse sind auch vernachlässigbar.

$m_1 = 15 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 50 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 10 \text{ kg}$ ,  $\theta = 37^\circ$ .

Hinweis: Setzen Sie für  $g = 10 \text{ m/s}^2$  ein,  $\sin 37^\circ = 3/5$ ;  $\cos 37^\circ = 4/5$ .

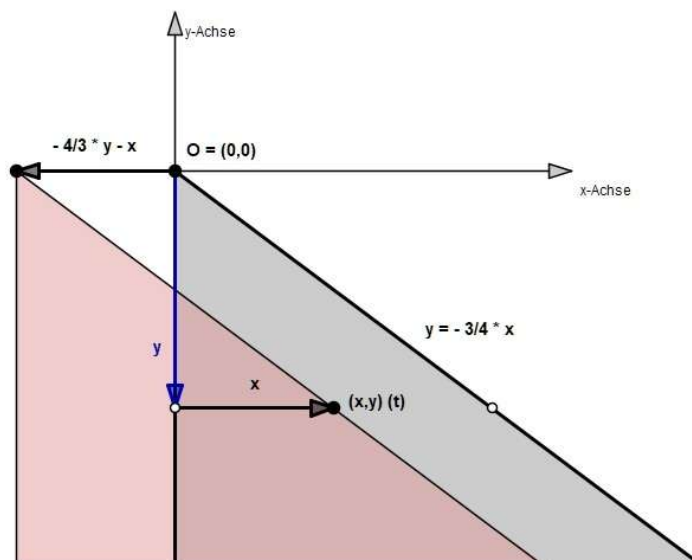
Abbildung 2.1: Massen  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  am Seil.



Bestimme die Beschleunigungen von Klotz 3 und Keil 2 im Laborsystem.

### Ortsfestes Koordinatensystem

O (0,0) in der Spitze des ruhenden Keils, Positive x-Achse parallel zum Tisch nach rechts, y-Achse senkrecht dazu nach oben.



## Bahnkurve des Klotzschwerpunkts und Zwangsbedingung

Für  $t < 0$  ist das System fixiert und der Klotzschwerpunkt befindet sich in  $O(0,0)$ .

Bei  $t = 0$  wird das System freigegeben und die Bewegung beginnt.

Für  $t > 0$  befindet sich der Klotzschwerpunkt im Punkt  $(x,y)$ , in positiver  $x$ -Richtung ist er um  $x$  verschoben. Der Keil ist in negativer  $x$ -Richtung parallel verschoben, wegen der

Zwangsbedingung um  $-4/3 * y - x$ . Vergleiche Bild „ortsfestes Koordinatensystem“.

Die Masse  $m_1$  verliert den gleichen Betrag an Höhe.

Klotz  $m_3$  hat dann um  $y$  an Höhe verloren.

## Geschwindigkeiten

Für  $m_3$  :  $\dot{x}, \dot{y}, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{0,5}$

Für  $m_1$  und  $m_2$  :  $-4/3 * \dot{y} - \dot{x}$ , ( $m_1$  in negativer  $y$ -Richtung,  
 $m_2$  in negative  $x$ -Richtung)

## Lagrangefunktion

$$L = T - U$$

$$T = (1/2) * (m_1 + m_2) * (-4/3 * \dot{y} - \dot{x})^2 + (1/2) * m_3 * (\dot{y}^2 + \dot{x}^2)$$

$$U = -m_1 * g * (-4/3 * y - x) - m_3 * g * y$$

$$d/dt \partial T / \partial \dot{x} = -(m_2 + m_1) * (-4 * \dot{y} / 3 - \ddot{x}) + m_3 * \ddot{x}$$

$$d/dt \partial T / \partial \dot{y} = -4 * (m_2 + m_1) * (-4 * \dot{y} / 3 - \ddot{x}) / 3 + m_3 * \ddot{y}$$

$$d/dx U = m_1 * g$$

$$d/dy U = m_1 * g * 4/3 - m_3 * g$$

Mit den Werten von  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  erhält man die Gleichungen:

$$G1 : 10\ddot{x} - 65(-4\dot{y}/3 - \ddot{x}) - 150 = 0$$

$$G2 : 10\ddot{y} - (260(-4\dot{y}/3 - \ddot{x}) / 3) - 100 = 0$$

$$\ddot{y} = -990/343 \approx -2,886297376 \quad \ddot{x} = 1830/343 \approx 5,335276968 \text{ lösen.}$$

Die Keilbeschleunigung ergibt sich daraus zu  $-510/343 \approx -1,486880466$

Auf der folgenden Seite prüfe ich auf Abweichung vom Energieerhaltungssatz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Überprüfung der Ergebnisse										
2	Zunahme der kinetischen Energie und Abnahme der potentiellen Energie										
3											
4				$b_x$	$b_y$	$b$	$B$				
5	Beschleunigungs			5,335276968	2,886297376	6,06596182546	1,486880466				
6	Beträge			$\geq 0$	$\leq 0$		$\leq 0$				
7	Geschwindigkeiten					$v = a \cdot t$					
8	Wegstrecken					$s = 1/2 \cdot a \cdot t^2$					
9		t		$E_{kin}$ Zunahme			$E_{pot}$ Abnahme			Differenz	
10		0,1		2,55830903745			2,5583090375			-4,518963E-11	
11		0,2		10,2332361498			10,23323615			-1,8075852E-10	
12		0,3		23,0247813371			23,0247813375			-4,06704E-10	
13		0,4		40,9329445993			40,9329446			-7,2303408E-10	
14		0,5		63,9577259364			63,9577259375			-1,1297416E-09	
15		0,6		92,0991253484			92,09912535			-1,6268018E-09	
16		0,7		125,357142835			125,3571428375			-2,2142927E-09	
17		0,8		163,731778397			163,7317784			-2,8921363E-09	
18		0,9		207,223032034			207,2230320375			-3,6603467E-09	
19		1		255,830903745			255,83090375			-4,5189381E-09	
20		1,1		309,555393532			309,5553935375			-5,467939E-09	
21		1,2		368,396501393			368,3965014			-6,5072072E-09	
22		1,3		432,35422733			432,3542273375			-7,6370839E-09	
23		1,4		501,428571341			501,42857135			-8,857171E-09	
24		1,5		575,619533427			575,6195334375			-1,0167582E-08	
25		1,6		654,927113588			654,9271136			-1,1568545E-08	
26		1,7		739,351311824			739,3513118375			-1,3059775E-08	
27		1,8		828,892128135			828,89212815			-1,4641387E-08	
28		1,9		923,549562521			923,549562537501			-1,6313379E-08	
29		2		1023,32361498			1023,323615			-1,8075752E-08	
30		2,1		1128,21428552			1128,2142855375			-1,9928621E-08	
31		2,2		1238,22157413			1238,22157415			-2,1871756E-08	
32		2,3		1353,34548081			1353,3454808375			-2,3905159E-08	
33		2,4		1473,58600557			1473,5860056			-2,6029284E-08	
34		2,5		1598,943148			1598,9431484375			-2,82432E-08	
35		2,6		1729,416909			1729,41690935			-3,05481E-08	

Da über die Größe des Keils keine Vorgaben gemacht wurden, mal für größere t-Werte.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
554			54,5	759881,7419			759881,74186345			-1,34225E-05
555			54,6	762672,857			762672,85702336			-1,34718E-05
556			54,7	765469,0888			765469,08880135			-1,35209E-05
557			54,8	768270,4372			768270,43719741			-1,35705E-05
558			54,9	771076,9022			771076,90221155			-1,36201E-05
559			55	773888,4838			773888,48384376			-1,36698E-05
560			55,1	776705,1821			776705,18209405			-1,37197E-05
561			55,2	779526,9969			779526,99696241			-1,37695E-05
562			55,3	782353,9284			782353,92844885			-1,38194E-05
563			55,4	785185,9765			785185,97655336			-1,38694E-05
564			55,5	788023,1413			788023,14127595			-1,39195E-05
565			55,6	790865,4226			790865,42261661			-1,39696E-05
566			55,7	793712,8206			793712,82057535			-1,40199E-05
567			55,8	796565,3351			796565,33515217			-1,40705E-05
568			55,9	799422,9663			799422,96634705			-1,41208E-05
569			56	802285,7141			802285,71416001			-1,41712E-05
570			56,1	805153,5786			805153,57859105			-1,42222E-05
571			56,2	808026,5596			808026,55964017			-1,42728E-05

Nach 56 Sekunden erst Abweichungen in der 5-ten Nachkommastelle.