Zylinderstapel: Beweise Normalkraftformel

gast_free

24.10.2025

1 Beweis Normalkraftformel

1.1 Mathematisch

Normalkraftformel für Schicht n:

$FN(n) = \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-1}}]$

Test Schicht 0 (Oberster Zylinder):

$FN(0) = \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{-1}}] = \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot [2 - 2] = FG \cdot 0 = 0$
Passt! Auf dem obersten Zylinder wirkt keine Normalkraft ein.
Test Schicht 1 (Zweite Reihe zwei Zylinder):

$FN(1) = \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^0}] = \frac{FG}{\sqrt{3}}$

Passt! Entspricht dem Ergebnis der Anfangsbetrachtung.

Test Schicht n+1 (n+2 Reihe n+1 Zylinder):

$FN(n+1) = \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^n}]$ Zu prüfen!

Von n auf n+1:
$FN(n+1) = FN(n) + FN(1) \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-1}}] + \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2^n}$

Bemerkung:
Die Zählung von oben nach unten ist leider genau anders herum als in der Reihe. Daher muss man bei der Erhöhung des Index um eins ganz hinten die Potenz $\frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2^n}$ dran hängen.
$FN(n+1) = \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}]$

$FN(n+1) = \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^n}]$

Passt ebenfalls:

Einschub Nebenrechnung:

$2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^{2 \cdot n-1}}$
$2 - \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^{2 \cdot n-1}} = 2 - \frac{2^{n+1} - 2^n}{2^{2 \cdot n}}$

$2 - \frac{2^{n+1}-2^n}{2^{2\cdot n}} = 2 - 2^{-n+1} + 2^{-n}$
$2 - 2^{-n+1} + 2^{-n} = 2 - 2^{-n} \cdot (2-1)$
$2 - 2^{-n} \cdot (2-1) = 2 - 2^{-n}$
$2 - 2^{-n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

1.2 Physikalisch

Krafteintrag aus der Ebene $n-1$ auf den linken Zylinder in der Ebene n.

$\vec{F}(n-1) = -\frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-2}}] \cdot \vec{e_x} - \frac{FG}{2} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-2}}] \cdot \vec{e_y}$

Dieser Kraft wirkt die folgende Normalkraft vom darunter liegenden linken Zylinder entgegen.

$\vec{FN}(n-1) = \frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-2}}] \cdot \vec{e_x} + \frac{FG}{2} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-2}}] \cdot \vec{e_y}$

$\vec{F}(n-1) + \vec{FN}(n-1) = 0$

Krafteintrag aus der Ebene n auf den linken Zylinder in der Ebene $n+1$.

$\vec{F}(n) = -\frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-1}}] \cdot \vec{e_x} - \frac{FG}{2} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-1}}] \cdot \vec{e_y}$

Dieser Kraft wirkt die folgende Normalkraft vom darunter liegenden linken Zylinder entgegen.

$\vec{FN}(n) = \frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-1}}] \cdot \vec{e_x} + \frac{FG}{2} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-1}}] \cdot \vec{e_y}$

$\vec{F}(n) + \vec{FN}(n) = 0$

Betrag der Kraftänderung in x-Richtung:
$\Delta FN_x = FN_x(n) - FN_x(n-1)$
$\Delta FN_x = \frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-1}}] - \frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-2}}]$
$\Delta FN_x = \frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot [\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}}]$
$\Delta FN_x = \frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot [\frac{2^{n-1}-2^{n-2}}{2^{n-2}\cdot 2^{n-1}}]$
$\Delta FN_x = \frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot [\frac{1-2^{-1}}{2^{-1}}]$
$\Delta FN_x = \frac{FG}{2\cdot\sqrt{3}}$

Betrag der Kraftänderung in y-Richtung:
$\Delta FN_y = FN_y(n) - FN_y(n-1)$
$\Delta FN_y = \frac{FG}{2} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-1}}] - \frac{FG}{2} \cdot [2 - \frac{1}{2^{n-2}}]$
$\Delta FN_y = \frac{FG}{2}$

Betrag der Kraftänderung in Normalenrichtung der Zylinderoberfläche:
$\Delta FN = \sqrt{{\Delta FN_x}^2 + {\Delta FN_y}^2}$
$\Delta FN = \sqrt{\frac{FG^2}{12} + \frac{FG^2}{4}}$
$\Delta FN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{FG^2}{3} + FG^2}$

$\Delta FN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot FG^2}{3}}$
$\Delta FN = \frac{FG}{\sqrt{3}}$

Passt wiederum und entspricht dem, was man erwarten darf.