

Zylinderstapel

gast_free

20.10.2025

1 Aufgabe

Aufgabe Physikerboard vom 26.09.2025: Bemerkung: Ich selber beschränke mich auf den Teil mit den Zylindern.

Man stelle sich eine ebene Unterlage (Boden) vor auf dem n Zylinderrollen nebeneinander in Kontakt liegen. Die Zylinder ganz links und rechts werden fixiert und dann die nächste Schicht mit $(n-1)$ Zylinderrollen auf die unterste Schicht gelegt. Das wird fortlaufend wiederholt mit $(n-2)$, $(n-3)$, ... Zylinderrollen bis man ganz oben den letzten Zylinder platziert. Man bekommt also ein gleichseitiges Dreieck (im Querschnitt) als Stapel mit N Zylindern bei n Schichten.

Dort wo sich die Zylinder miteinander berühren (Linienkontakt) soll der Gleithaftwert μ_{A1} vorliegen. Zwischen Boden und Zylinder liegt dagegen die Gleithaftung μ_{A2} vor.

2 Allgemeine Bemerkungen

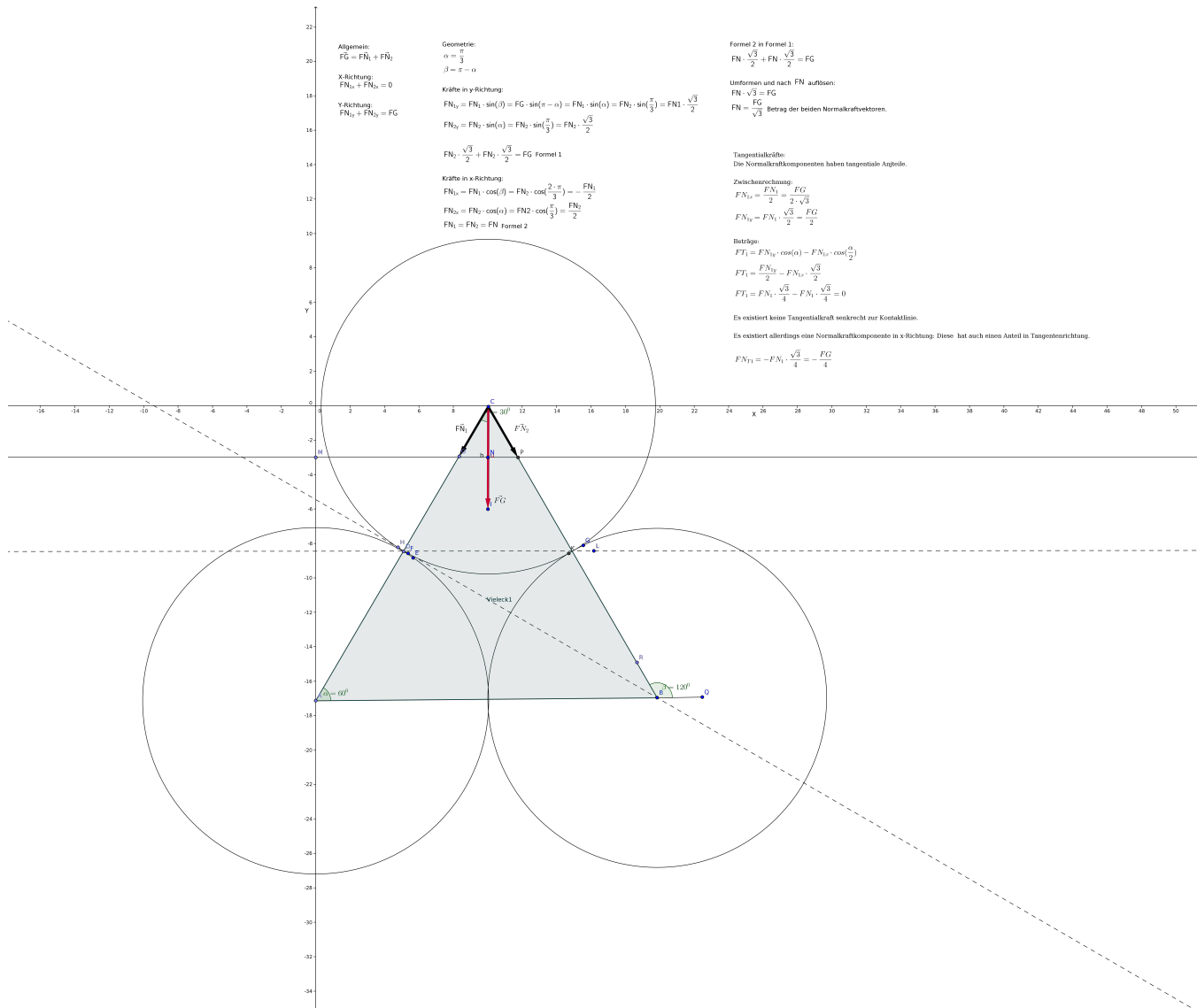
Nachdem ich die erste Fassung aufgrund von Fehlern und Ungenauigkeiten verworfen habe, starte ich nun einen Neuaufsatz. Hier werde ich auf mathematische Strenge achten und die Kräfte sowie die Momente vektoriell beschreiben. Tatsächlich haben einfache Experimente mir Folgendes gezeigt. Die Zylinder auf verschiedenen Unterlagen kommen eher ins Rollen als ins Gleiten. Es sind also beide Vorgänge bei der Stabilitätsbetrachtung zu berücksichtigen.

3 Die ersten beiden Schichten

Es werden die ersten drei Zylinder, von oben, betrachtet. Also die obersten beiden Schichten. Oben ein Zylinder und darunter zwei. Wenn hier die Verhältnisse geklärt sind, werde ich verallgemeinern. Es geht ganz konkret um die Stabilitätsbedingungen im Sinne der Statik.

Das Bild auf der folgenden Seite dient der Veranschaulichung. In ihm stecken die geometrischen Überlegungen.

— Beginn Graphik —



— Ende Graphik —

4 Kräfte

4.1 Normalkräfte auf den Zylinder Kontaktlinien

Bemerkung: Die Normalkräfte stehen senkrecht auf der Oberfläche und zeigen nach außen. So werden die meisten festgelegt. Hier werden sie jedoch mit umgedrehten Vorzeichen verwendet. Also als senkrechte Komponenten der Kräfteinträge von außen.

\vec{FG} Gewichtskraft eines Zylinders.

$F\vec{N}_1$ Normalkraft des linken Zylinders in der unteren Anordnung.
 $F\vec{N}_2$ Normalkraft des rechten Zylinders in der unteren Anordnung.

Gleichgewichtsbedingung für den obersten Zylinder.
 $F\vec{G} = F\vec{N}_1 + F\vec{N}_2$

Zerlegung der Kräfte in y-Richtung und in x-Richtung.
 $FN_{1x} + FN_{2x} = 0$
 $FN_{1y} + FN_{2y} = -FG$

Bestimmungsgleichungen für die Komponenten aus der Geometrie.
 $\alpha = \frac{\pi}{3}$
 $\beta = \pi - \alpha$

Komponenten in x-Richtung:
 $FN_{1x} = FN_1 \cdot \cos(\alpha) = FN_1 \cdot \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{FN_1}{2}$
 $FN_{2x} = FN_2 \cdot \cos(\beta) = FN_2 \cdot \cos(\pi - \alpha) = FN_2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{FN_2}{2}$

Komponenten in y-Richtung:
 $FN_{1y} = FN_1 \cdot \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN_1$
 $FN_{2y} = FN_2 \cdot \sin(\beta) = FN_2 \cdot \sin(\alpha) = FN_2 \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN_2$

Bestimmungsgleichungen:
 $\frac{FN_1}{2} - \frac{FN_2}{2} = 0$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN_2 = -FG$

$$FN_1 = FN_2 := FN$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN = \sqrt{3} \cdot FN = -FG \Rightarrow FN = -\frac{FG}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{FN = \frac{FG}{\sqrt{3}}} \text{ Betrag}$$

Normalkraftvektoren:
 $F\vec{N}_1 = \frac{FN_1}{2} \cdot \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN_1 \cdot \vec{e}_y$

$$\boxed{F\vec{N}_1 = -FG \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \vec{e}_x - FG \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_y}$$

$$F\vec{N}_2 = -\frac{FN_1}{2} \cdot \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot FN_1 \cdot \vec{e}_y$$

$$\boxed{F\vec{N}_2 = FG \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \vec{e}_x - FG \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_y}$$

4.2 Tangentialkräfte senkrecht zu den Zylinder Kontaktlinien

Um die Tangentialkräfte zu ermitteln, werden die Komponenten der Normalkräfte auf die Richtungslinien, die senkrecht zu den Radiusvektoren der Zylinder stehen, projiziert.

Diese Richtungslinie habe den Einheitsvektor \vec{e}_T . Er zeigt nach Rechts.

$$F\vec{T}_1 = [-FN_{1x} \cdot \cos(\frac{\alpha}{2}) + FN_{1y} \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})] \cdot \vec{e}_T$$

$$F\vec{T}_1 = [-FN_{1x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{FN_{1y}}{2}] \cdot \vec{e}_T$$

$$F\vec{T}_1 = [-FN_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + FN_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}] \cdot \vec{e}_T$$

$F\vec{T}_1 = 0 \cdot \vec{e}_T$ Es existiert keine Tangentalkomponente vom obersten Zylinder!

Dasselbe lässt sich auch für $F\vec{T}_2$ zeigen. Dies geht bereits aus der Symmetrie der Anordnung hervor.

4.3 Normalkräfte auf der Unterlage

Die Normalkräfte der beiden unteren Zylinder sind identisch.

$$FN_u = FN_{u1} = FN_{u2} = FG + \frac{FG}{2} = \frac{3}{2} \cdot FG$$

Vektoriell:

$$F\vec{N}_u = \frac{3}{2} \cdot FG \cdot \vec{e}_y$$

4.4 Tangentialkräfte auf der Unterlage

Die Tangentialkraft in Bezug auf die Unterlage bzw. in -Richtung ist die bereits errechnete x-Komponente des Normalkraftvektors, der von dem obersten Zylinder eingebracht wird.

$$F\vec{T}_u = F\vec{N}_{1x} = \frac{F\vec{N}_1}{2} = -\frac{FG}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \vec{e}_x$$

4.5 Momente

4.5.1 Momente am unteren linken Zylinder

Momente sind Kräftepaare. Es tritt pro unterer Zylinder die waagerechte Komponente an der Schwerpunktschwerachse und die Reibungskraft-Komponente auf der Kontaktlinie Zylinder und Unterlage in Erscheinung:

R Zylinderradius.

$$\begin{aligned} \vec{M}_u &= \vec{R} \times F\vec{N}_{1x} \\ \vec{M}_u &= R \cdot \frac{F\vec{N}_1}{2} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{M}_u &= R \cdot \frac{FG}{4} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Diesem antreibenden Moment wirken zwei bremsende Momente entgegen. Einmal die Reibungskraft auf der Unterlage und dann noch die Reibungskraft auf der Kontaktlinie zwischen den beiden Zylindern.

$$FR_u = \mu_2 \cdot FN_u = \mu_2 \cdot \frac{3}{2} \cdot FG \text{ Reibungskraft Unterlage.}$$

$$FR_z = \mu_1 \cdot FN = \mu_1 \cdot \frac{FG}{\sqrt{3}} \text{ Reibungskraft zwischen den Zylindern.}$$

Damit verbunden sind die folgenden bremsenden Momente.

$$MR_u = \mu_2 \cdot FN_u \cdot R = \mu_2 \cdot \frac{3}{2} \cdot FG \cdot R$$

$$MR_z = \mu_1 \cdot FN \cdot R = \mu_1 \cdot \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot R$$

4.6 Stabilitätsbetrachtungen

4.6.1 Gleiten

Die besagte horizontale Normalkomponente $F\vec{T}_u = \frac{FG}{4} \cdot \vec{e}_x$ Versucht den Zylinder gleitend über die Unterlage heraus zu ziehen. Die Haftreibungskraft wirkt dem entgegen.

$$FT_u \leq \mu_{gr1} \cdot \frac{3}{2} \cdot FG$$

$$\frac{FG}{2 \cdot \sqrt{3}} \leq \mu_{gr1} \cdot \frac{3}{2} \cdot FG$$

$$\frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} \leq \mu_{gr1}$$

bzw.

$$\mu_{gr} \geq \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} \approx 0,192$$

Das entspricht einem Reibungswinkel von ca. 10,89 Grad.

4.6.2 Stabilitätsbedingung Rollreibwerte

Da nur auf den untersten äußeren Zylindern Drehmomente wirken werden diese am ehesten aus der Anordnung rollend ausbrechen. Es wirken zwei Gegenmomente bremsend. Ein Moment ausgehend von der Rollreibungskraftkraft zwischen den Zylindern und ein Moment aus der Rollreibungskraft zwischen untersten Zylinder und Unterlage.

μ_{rr1} Rollreibungskoeffizient zwischen den Zylindern.

μ_{rr2} Rollreibungskoeffizient zwischen Zylinder und Untergrund.

M_u : Moment hervorgerufen von der Tangentialkraft.

$$M\vec{R}_u = -\vec{R} \times F\vec{N}_x = R \cdot \frac{FG}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \vec{e}_z$$

MR_z : Reibungsmoment, verursacht durch die Reibungskraft zwischen den Zylindern.

$$M\vec{Z}_u = -\mu_{rr1} \cdot \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot R \cdot \vec{e}_z$$

MR_u : Reibungsmoment, verursacht durch die Reibungskraft zwischen Zylinder und Unterlage.

$$MR_u = -\mu_{rr2} \cdot \frac{3}{2} \cdot FG \cdot R \cdot \vec{e}_z$$

$$M_u \leq MR_z + MR_u$$

$$R \cdot \frac{FG}{2 \cdot \sqrt{3}} \leq \mu_{rr1} \cdot \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot R + \mu_{rr2} \cdot \frac{3}{2} \cdot FG \cdot R$$

$$\frac{FG}{2 \cdot \sqrt{3}} \leq \mu_{rr1} \cdot \frac{FG}{\sqrt{3}} + \mu_{rr2} \cdot \frac{3}{2} \cdot FG$$

Abhängigkeiten der beiden Rollreibungskoeffizienten voneinander in Bezug auf das Stabilitätskriterium.

$$\boxed{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \leq \mu_{rr1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \mu_{rr2} \cdot \frac{3}{2}}$$

$$-\mu_{rr1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \leq -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} + \mu_{rr2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\mu_{rr1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} - \mu_{rr2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\mu_{rr1} \geq \frac{1}{2} - \mu_{rr2} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}}$$

$$\mu_{rr2} \cdot \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} - \mu_{rr1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\mu_{rr2} \geq \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} - \mu_{rr1} \cdot \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$$

4.6.3 Stabilitätsbedingung bei gleichen Rollreibungswerten

$$\mu_{rr} = \mu_{rr1} = \mu_{rr2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \leq \mu_{rr} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \mu_{rr} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \leq \mu_{rr} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \leq \mu_{rr} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \leq \mu_{rr} \cdot \left(\frac{2+3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}} \right)$$

Mindestrollreibungswert bei indentischen Material.

$$\boxed{\mu_{rr} \geq \frac{1}{2+3 \cdot \sqrt{3}}}$$

$$\mu_{rr} \geq 0,139$$

Das entspricht einem Rollreibungswinkel von ca. 7,9 Grad.

4.7 Ein Beispiel mit konkreten Zahlen

Stahl-Stahl trocken:

$\mu_{hr1} = 0,15 \dots 0,30$ Haftreibung.

$\mu_{rr1} = 0,001 \dots 0,002$ Rollreibung (Eigentlich Eisenrad auf Eisenschiene).

Aufgrund der Reibungswerte wird ein Haufen aus Stahlzylinder gelagert auf Stahlplatten durch Gleitreibung auseinander rutschen.

Betrachtet man die Rollreibungswerte werden die Stabilitätskriterien ebenfalls nicht erfüllt. In diesem Fall müsste der Reibwert Stahlzylinder zur Unterlage mindestens $\mu_{rr2} \geq 0,192$ betragen. Das entspricht einem Rollreibungswinkel von mindestens 10,86 Grad.

Bemerkung: Bei sehr kleinen und leichten Zylindern kann in Ausnahmefällen eine sehr fragile Stabilität auftreten. Ich vermute, das dies mit zusätzlichen Kräften wie z.B. Adhäsionskräften zu tun hat. Sie treten eigentlich immer auf, aber sind sehr häufig vernachlässigbar. Bei bestimmten Kunststoffem könnte es sich auch um elektrostatische Einflüsse handeln. Diese Einflüsse werden im Rechenmodell nicht berücksichtigt.

5 Weitere Schichten

Ab Schicht drei, von oben gezählt, sind die Zylinder innerhalb des Stapels in x-Richtung kräftefrei. Die x-Komponenten der Normalkräfte heben sich gegenseitig auf. Daher tragen sie im stabilen Zustand nichts dazu bei, die Zylinder nach außen zu treiben. Es werden im Weiteren die Kräfte auf den äußeren Zylindern, die die Sattelfläche bilden, betrachtet. Hier nun die linke Sattelfläche. Aus Symmetriegründen gilt für die rechten Zylinder genau dasselbe. In x-Richtung allerdings mit umgekehrten Vorzeichen.

5.1 Gewichtskräfte

Schicht 3 bis n :

Gewichtskraft, die auf den Zylinder wirkt.

$FG(1) = FG$ Es befinden sich keine Zylinder darüber.

$FG(2) = FG + \frac{FG}{2}$ Die Gewichtskraft teilt sich auf die beiden unteren Zylinder auf.

$FG(3) = FG + \frac{FG(2)}{2} = FG + \frac{FG}{2} + \frac{FG}{4}$

...

$FG(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{FG}{2^i} = FG \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}$

Einschub:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

$$S = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$q \cdot S = q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$$

$$S - q \cdot S = q^0 - q^n$$

$$S = \frac{q^0 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Einschub Ende:

$$FG(n) = FG \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = FG \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Beweis (Vollständige Induktion):

Annahme:

$$FG(n) = FG \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Verankerung:

$$FG(1) = FG \cdot \left(2 - \frac{1}{2^0}\right) = FG$$

Schritt von n auf $n + 1$:

$$FG(n+1) = FG(n) + FG \cdot \frac{1}{2^n} = FG \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) = FG \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] = FG \cdot \left[2 - \frac{1}{2^n}\right]$$

Direkt auf $n + 1$:

$$FG(n+1) = FG \cdot \left[2 - \frac{1}{2^n}\right]$$

Q.E.D.

5.2 Normalkräfte

Normalkraft, die auf den linken Zylinder in der Schicht n eingetragen wird.

$$FN(n) = \frac{FG(n-1)}{\sqrt{3}} = \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

5.3 Normalkraftkomponente in x-Richtung

$$FN_u(n)_x = FN(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{FN(n)}{2} = \frac{FG}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$F(n)_x = \frac{FG}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

5.4 Bodenpressung

Bodenpressung unter dem Zylinder links in der n -ten Schicht.

$$FN_u(n) = FG + FG(n-1) = FG(n) = FG \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$FN_u(n) = FG \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

5.5 Stabilitätsbetrachtungen

5.5.1 Gleiten

Die besagte horizontale Normalkomponente $F\vec{T}_u = \frac{FG}{4} \cdot \vec{e}_x$ Versucht den Zylinder gleitend über die Unterlege heraus zu ziehen. Die Haftreibungskraft wirkt dem entgegen.

$$\begin{aligned} FT_u(n-1) &\leq \mu_{gr1} \cdot FN_u(n) \\ \frac{FG}{2\sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right] &\leq \mu_{gr1} \cdot FG \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right] &\leq \mu_{gr1} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \frac{1}{2^{n-2}}}{2 - \frac{1}{2^{n-1}}} &\leq \mu_{gr1} \end{aligned}$$

bzw.

$$\mu_{gr1} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \frac{1}{2^{n-2}}}{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

5.5.2 Rollen

Da nur auf den untersten äußeren Zylindern Drehmomente wirken werden diese am ehesten aus der Anordnung rollend ausbrechen. Es wirken zwei Gegenmomente bremsend. Ein Moment ausgehend von der Rollreibungskraft zwischen den Zylindern und ein Moment aus der Rollreibungskraft zwischen untersten Zylinder und Unterlage.

μ_{rr1} Rollreibungskoeffizient zwischen den Zylindern.

μ_{rr2} Rollreibungskoeffizient zwischen Zylinder und Untergrund.

M_u : Moment hervorgerufen von der Tangentialkraft.

$$M_u(n) = -\vec{R} \times FN_x(n-1) = R \cdot \frac{FG}{2\sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right] \vec{e}_z$$

MR_z : Reibungsmoment, verursacht durch die Reibungskraft zwischen den Zylindern.

$$MR_z(n) = -\mu_{rr1} \cdot \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right] \cdot R \cdot \vec{e}_z$$

MR_u : Reibungsmoment, verursacht durch die Reibungskraft zwischen Zylinder und Unterlage.

$$MR_u(n) = -\mu_{rr2} \cdot FG \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right] \cdot R \cdot \vec{e}_z$$

$$M_u(n) \leq MR_z(n) + MR_u(n)$$

$$R \cdot \frac{FG}{2\sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right] \leq \mu_{rr1} \cdot \frac{FG}{\sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right] \cdot R + \mu_{rr2} \cdot FG \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right] \cdot R$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right] \leq \mu_{rr1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right] + \mu_{rr2} \cdot \left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

Abhängigkeit der Rollreibungskoeffizienten untereinander:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \mu_{rr1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \mu_{rr2} \cdot \frac{\left[2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right]}{\left[2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right]}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} - \mu_{rr2} \cdot \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]} \leq \mu_{rr1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\mu_{rr1} \geq \frac{1}{2} - \mu_{rr2} \cdot \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]} - \mu_{rr1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]} \leq \mu_{rr2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]} \cdot [\frac{1}{2} - \mu_{rr1}] \leq \mu_{rr2}$$

$$\boxed{\mu_{rr2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]} \cdot [\frac{1}{2} - \mu_{rr1}]}$$

$$\mu_{rr} = \mu_{rr1} = \mu_{rr2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \mu_{rr} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \mu_{rr} \cdot \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \mu_{rr} \cdot [\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]}]$$

Mindestrollreibungswert bei gleichen Materialien.

$$\boxed{\mu_{rr} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]}}}$$

6 Zusammenfassung

Ergebnisse Zusammenfassung:

Koeffizient	Anzahl von Schichten	Bemerkung
$\mu_{gr} \geq \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0,192$	2	Gleiten
$\mu_{rr} \geq \frac{1}{2+3\sqrt{3}} \approx 0,139$	2	Rollen, gleiches Material
$\mu_{gr} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \frac{1}{2^{n-2}}}{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}$	n	Gleiten
$\mu_{rr} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}{2 - \frac{1}{2^{n-2}}}}$	n	Rollen, gleiches Material
$\mu_{gr} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,289$	∞	Gleiten
$\mu_{rr} \geq \frac{1}{2+2\sqrt{3}} \approx 0,183$	∞	Rollen gleiches Material

Berechnung eines Rollreibungskoeffizienten, wenn einer vorgegeben ist:

Koeffizient	Anzahl von Schichten	Bemerkung
$\mu_{rr1} \geq \frac{1}{2} - \mu_{rr2} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$	2	Rollen
$\mu_{rr2} \geq \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} - \mu_{rr1} \cdot \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}}$	2	Rollen
$\mu_{rr1} \geq \frac{1}{2} - \mu_{rr2} \cdot \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]} \cdot \sqrt{3}$	n	Rollen
$\mu_{rr2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{[2 - \frac{1}{2^{n-2}}]}{[2 - \frac{1}{2^{n-1}}]} \cdot [\frac{1}{2} - \mu_{rr1}]$	n	Rollen
$\mu_{rr1} \geq \frac{1}{2} - \mu_{rr2} \cdot \sqrt{3}$	∞	Rollen
$\mu_{rr2} \geq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} - \frac{\mu_{rr1}}{\sqrt{3}}$	∞	Rollen