

Differentialgleichung harmonische Schwingung

Lösungsprobe überarbeitet und etwas klarer umgestaltet

gast free

10.10.2025

1 Aufgabe

In der Mechanik ist die Voraussetzung für eine harmonische Schwingung, dass ein lineares Kraftgesetz gilt.

$$F = k \cdot x$$

Dieser Kraft wirkt die Trägheitskraft entgegen.

$$T_t = -m \cdot \ddot{x}$$

Aus diesen Kräften soll die Bewegungsgleichung samt Nebenbedingungen erstellt werden.

2 Differentialgleichung der Bewegung

$$F_t + F = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Hierbei handelt es sich um eine homogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

3 Einschub

3.1 Homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$x = x(t)$$

$$\dot{x} + \lambda \cdot x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda \cdot x$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= -\lambda \cdot dt \\ \int \frac{dx}{x} &= -\lambda \cdot \int dt \\ \ln(x) &= -\lambda \cdot t + C \\ x &= e^{-\lambda \cdot t + C}\end{aligned}$$

$$x = x(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

3.2 Homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + \lambda_1 \cdot \dot{x} + \lambda_0 \cdot x = 0$$

$$\begin{aligned}x &= x(0) \cdot e^{-\gamma \cdot t} \\ \dot{x} &= -\gamma \cdot x(0) \cdot e^{-\gamma \cdot t} \\ \ddot{x} &= \gamma^2 \cdot x(0) \cdot e^{-\gamma \cdot t}\end{aligned}$$

Sog. charakteristische Gleichung:

$$\gamma^2 - \gamma \cdot \lambda_1 + \lambda_0 = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_1}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}$$

$$\gamma_2 = \frac{\lambda_1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}$$

$$x(t)_1 = x_1(t_0) \cdot e^{[\frac{\lambda_1}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}] \cdot t}$$

$$x(t)_2 = x_2(t_0) \cdot e^{[\frac{\lambda_1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}] \cdot t}$$

Allgemeine Lösungen:

$$x(t) = x_1(t_0) \cdot e^{[\frac{\lambda_1}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}] \cdot t} + x_2(t_0) \cdot e^{[\frac{\lambda_1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}] \cdot t}$$

$$\dot{x}(t) = x_1(t_0) \cdot [\frac{\lambda_1}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}] \cdot e^{[\frac{\lambda_1}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}] \cdot t} + x_2(t_0) \cdot [\frac{\lambda_1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}] \cdot e^{[\frac{\lambda_1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}] \cdot t}$$

Abkürzungen:

$$W_1 = [\frac{\lambda_1}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}]$$

$$W_2 = [\frac{\lambda_1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{4} - \lambda_0}]$$

Damit:

$$x(t) = x_1(t_0) \cdot e^{W_1 \cdot t} + x_2(t_0) \cdot e^{W_2 \cdot t}$$

$$\dot{x}(t) = x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t} + x_2(t_0) \cdot W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t}$$

Randbedingungen:

Position zum Zeitpunkt $t = t_0$.

$$x(t_0) = x_1(t_0) \cdot e^{W_1 \cdot t_0} + x_2(t_0) \cdot e^{W_2 \cdot t_0}$$

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = t_0$.

$$\dot{x}(t_0) = x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0} + x_2(t_0) \cdot W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}$$

Auflösen nach den Randbedingungen:

$$x_2(t_0) \cdot e^{W_2 \cdot t_0} = x(t_0) - x_1(t_0) \cdot e^{W_1 \cdot t_0}$$

$$x_2(t_0) \cdot W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0} = \dot{x}(t_0) - x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0}$$

$$x_2(t_0) = \frac{\dot{x}(t_0) - x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0}}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}}$$

$$\frac{\dot{x}(t_0) - x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0}}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}} \cdot e^{W_2 \cdot t_0} = x(t_0) - x_1(t_0) \cdot e^{W_1 \cdot t_0}$$

$$\frac{\dot{x}(t_0) - x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0}}{W_2} = x(t_0) - x_1(t_0) \cdot e^{W_1 \cdot t_0}$$

$$\dot{x}(t_0) - x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0} = x(t_0) \cdot W_2 - x_1(t_0) \cdot e^{W_1 \cdot t_0} \cdot W_2$$

$$x_1(t_0) \cdot e^{W_1 \cdot t_0} \cdot W_2 - x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0} = x(t_0) \cdot W_2 - \dot{x}(t_0)$$

$$x_1(t_0) \cdot e^{W_1 \cdot t_0} \cdot [W_2 - W_1] = x(t_0) \cdot W_2 - \dot{x}(t_0)$$

$$\boxed{x_1(t_0) = x(t_0) \cdot \frac{W_2}{W_2 - W_1} \cdot e^{-W_1 \cdot t_0} - \frac{\dot{x}(t_0)}{W_2 - W_1} \cdot e^{-W_1 \cdot t_0}}$$

$$x_2(t_0) = \frac{\dot{x}(t_0) - x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0}}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}}$$

$$x_2(t_0) = \frac{\dot{x}(t_0)}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}} - \frac{x_1(t_0) \cdot W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0}}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}}$$

$$x_2(t_0) = \frac{\dot{x}(t_0)}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}} - \frac{W_1 \cdot e^{W_1 \cdot t_0}}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}} \cdot [x(t_0) \cdot \frac{W_2}{W_2 - W_1} \cdot e^{-W_1 \cdot t_0} - \frac{\dot{x}(t_0)}{W_2 - W_1} \cdot e^{-W_1 \cdot t_0}]$$

$$\boxed{x_2(t_0) = \frac{\dot{x}(t_0)}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}} - \frac{W_1}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}} \cdot [x(t_0) \cdot \frac{W_2}{W_2 - W_1} - \frac{\dot{x}(t_0)}{W_2 - W_1}]}$$

Lösung mit Randbedingungen vollständig:

$$x(t) = [x(t_0) \cdot \frac{W_2}{W_2 - W_1} \cdot e^{-W_1 \cdot t_0} - \frac{\dot{x}(t_0)}{W_2 - W_1} \cdot e^{-W_1 \cdot t_0}] \cdot e^{W_1 \cdot t} + [\frac{\dot{x}(t_0)}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}} - \frac{W_1}{W_2 \cdot e^{W_2 \cdot t_0}} \cdot [x(t_0) \cdot \frac{W_2}{W_2 - W_1} - \frac{\dot{x}(t_0)}{W_2 - W_1}]] \cdot e^{W_2 \cdot t}$$

4 Lösen der ursprünglichen Differentialgleichung

Nebenbedingungen:

$$x(0) = x_0$$

$$x'(0) = v_0$$

Typ:

$$\boxed{\ddot{x} + \lambda_0 \cdot x = 0}$$

Allgemeine Lösung:

$$i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{2 \cdot \sqrt{\lambda_0}} \cdot e^{-i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)}$$

$$x(t) = x(t_0) \cdot \cosh[i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)] - i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{2 \cdot \sqrt{\lambda_0}} \cdot e^{-i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)} + i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{\sqrt{\lambda_0}} \cdot e^{i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)} - i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{2 \cdot \sqrt{\lambda_0}} \cdot e^{-i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)}$$

$$x(t) = x(t_0) \cdot \cosh[i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)] - i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{2 \cdot \sqrt{\lambda_0}} \cdot e^{-i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)} + i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{\sqrt{\lambda_0}} \cdot e^{i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)} - i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{2 \cdot \sqrt{\lambda_0}} \cdot e^{-i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)}$$

$$x(t) = x(t_0) \cdot \cosh[i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)] + i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{2 \cdot \sqrt{\lambda_0}} \cdot e^{i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)} - i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{2 \cdot \sqrt{\lambda_0}} \cdot e^{-i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)}$$

$$x(t) = x(t_0) \cdot \cosh[i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)] + i \cdot \frac{\dot{x}(t_0)}{\sqrt{\lambda_0}} \cdot \sinh[i \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)] \quad \text{Lösungsformel!}$$

4.2 Einige Identitäten

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sinh(i \cdot x) &= \frac{e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}}{2} = \frac{\cos(x) + i \cdot \sin(x) - [\cos(-x) + i \cdot \sin(-x)]}{2} = \frac{\cos(x) + i \cdot \sin(x) - [\cos(x) - i \cdot \sin(x)]}{2} \\ &= \frac{i \cdot 2 \cdot \sin(x)}{2} = i \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cosh(i \cdot x) &= \frac{e^{i \cdot x} + e^{-i \cdot x}}{2} = \frac{e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}}{2} = \frac{\cos(x) + i \cdot \sin(x) + \cos(-x) + i \cdot \sin(-x)}{2} = \frac{\cos(x) + i \cdot \sin(x) + \cos(x) - i \cdot \sin(x)}{2} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

4.3 Identitäten angewendet auf die Lösungsformel

$$x(t) = x(t_0) \cdot \cos[\sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)] - \frac{\dot{x}(t_0)}{\sqrt{\lambda_0}} \cdot \sin[\sqrt{\lambda_0} \cdot (t-t_0)]$$

$$\omega = \sqrt{\lambda_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

5 Lösungen

$$x(t) = x(t_0) \cdot \cos[\omega \cdot (t-t_0)] - \frac{\dot{x}(t_0)}{\omega} \cdot \sin[\omega \cdot (t-t_0)]$$

$$\dot{x}(t) = -x(t_0) \cdot \omega \cdot \sin[\omega \cdot (t-t_0)] - \dot{x}(t_0) \cdot \cos[\omega \cdot (t-t_0)]$$

6 Überprüfung der Lösungen

Prüfen der Anfangsbedingungen:

$$x(t_0) = x(t_0) \cdot \cos[\omega \cdot (0)] - \frac{\dot{x}(t_0)}{\omega} \cdot \sin[\omega \cdot (0)] = x(t_0)$$

$$\dot{x}(t_0) = -x(t_0) \cdot \omega \cdot \sin[\omega \cdot (0)] - \dot{x}(t_0) \cdot \cos[\omega \cdot (0)] = \dot{x}(t_0)$$

Ableiten und einsetzen in die ursprüngliche Dgl.

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

$$x''(t) = -x(t_0) \cdot \omega^2 \cdot \cos[\omega \cdot (t - t_0)] + \dot{x}(t_0) \cdot \omega \cdot \sin[\omega \cdot (t - t_0)]$$

$$-x(t_0) \cdot \omega^2 \cdot \cos[\omega \cdot (t - t_0)] + \dot{x}(t_0) \cdot \omega \cdot \sin[\omega \cdot (t - t_0)] + x(t_0) \cdot \omega^2 \cdot \cos[\omega \cdot (t - t_0)] - \frac{\dot{x}(t_0)}{\omega} \cdot \sin[\omega \cdot (t - t_0)] =$$

$$-x(t_0) \cdot \omega^2 \cdot \cos[\omega \cdot (t - t_0)] + \dot{x}(t_0) \cdot \omega \cdot \sin[\omega \cdot (t - t_0)] + x(t_0) \cdot \omega^2 \cdot \cos[\omega \cdot (t - t_0)] - \dot{x}(t_0) \cdot \omega \cdot \sin[\omega \cdot (t - t_0)] = 0$$