Hohlkugel mit Ladung
Physiker Board
Version 4.0

gast free

16.09.2025

1 Einleitung

Die vorliegende Aufgabe stammt aus dem Physikerboard " www.physikerboard.de" Bereich Elektrik. Die Lösung wurde mehrfach überarbeitet. Vielen Dank für die vielen Tipps und Mitarbeit insbesondere von den Boardmitgliedern RomanGa und Myon. Die Hinweise insbesondere was die Stetigkeit der Potentialfunktionen an an den Grenzflächen betrifft, hat mir sehr geholfen. Die vorliegende Überarbeitung wurde von mir gestrafft und es wurden bei den Größen die Indizes neu sortiert. Der Innenraum $0 < r \leq R_1$ hat den Index 1, also $\phi_1(r)$ usw.. Der Kugelmantel $R_1 \leq r \leq R_2$ den Index 2 und der Bereich Außerhalb den Index 3. Ich werde noch mal in Ruhe alles durchgehen und prüfen ob sich vielleicht doch noch Fehler versteckt halten. Gerne bin auch weiterhin bereit Kritiken und Anregungen anzunehmen. Bei den letzten Anmerkungen von RomanGa und Myon ging es um die Vorzeichen der Potentialfunktionen. Ich habe mich ein bischen schwer getan dies nachzuvollziehen. Die Gedanken hierzu möchte ich im folgenden Kapitel erläutern.

2 Die Sache mit dem Vorzeichen

Der Feldstärkevektor $\vec{E(r)}$ zeigt in die Richtung, in der die Feldkraft $\vec{F(r)}$, die auf eine positive Probeladung q wirkt, hin zeigt.

$\vec{F(r)} = q \cdot \vec{E(r)}$

Welches Vorzeichen nun die Feldstärkevektoren bekommen sollte doch von der Wahl des Koordinatensystems abhängen. Zeigt der Einheitsvektor $\vec{e_r}$ vom Zentrum der positiven Ladung Q^+ nach außen und wird eine positive Probeladung q^+ vom Zentraum der positiven Ladung radial nach außen gedrückt, so ist die Feldstärke positiv. Dasselbe gilt für den Kraftvektor.

$\vec{F(r)} = q \cdot E(r) \cdot \vec{e_r}$

Hierbei war in der folgenden Aufgabe die Probeladung positiv und r-Koordinate vom Zentrum radial nach außen.

$\vec{E_1(r)} = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e_r}$

Wenn man nun die Potentialfunktion ohne Berücksichtigung der Kugelschale berechnet erhält man folgendes.

$\phi_1(r) = \frac{Q}{4\cdot\epsilon_0\cdot\pi} \cdot \int_{r=r_p}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -[\frac{1}{4\cdot\epsilon_0\cdot\pi\cdot r}]|_{r_p}^{\infty} = \frac{e}{4\cdot\epsilon_0\cdot\pi\cdot r}$

Dies bestätigt die Aussage von Myon.

Mein Hauptfehler lag am Vorzeichen des unbestimmten Integrals für die Berechnung der Potentialfunktion mit Integrationskonstante. Das Nullpotential liegt im unendlichen. Wenn man dies implizit vorraussetzt erhält das Integral ein negatives Vorzeichen.
Unter Beachtung des Vorzeichens von dem Integral, der Probeladung und der Koordinatenwahl gehen ich die gesamte Lösung noch mal durch.

3 Aufgabe

Die Folgende, in der Grafik beschriebene, Aufgabe aus der Elektrostatik ist zu lösen.

Aufgabe 5: Elektrisches Feld von Punktladung und Hohlkugel **(12 Punkte)**

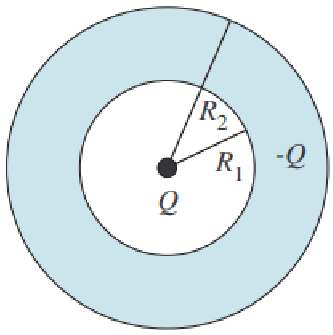
Eine Punktladung Q befindet sich im Zentrum einer Hohlkugel mit dem Innenradius R_1 und dem Außenradius R_2 (siehe Abbildung). Die Hohlkugel ist homogen geladen und trägt die Gesamtladung $-Q$.

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des Gauß'schen Gesetzes das elektrische Feld $\vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$ in den drei Bereichen

$$0 \leq r \leq R_1, \qquad R_1 \leq r \leq R_2, \qquad R_2 \leq r < \infty.$$

(b) (2 Punkte) Skizzieren Sie $E(r)$ in Abhängigkeit von r.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige elektrostatische Potential $\phi(r)$.



4 Lösungsansatz

Wie in dem Kapitel 'Die Sache mit dem Vorzeichen ' sollen folgende Festlegungen getroffen werden.

1. $\vec{e_r}$ zeigt vom Kugelmittelpunkt nach außen.
2. Der Feldstärkevektor zeigt in Richtung positiver Ladung.

Es gelten die folgenden Zusammenhänge.
1. $Q = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV$

2. $Q = \iint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A}$
3. $\epsilon_0 \cdot \vec{E} = \vec{D}$

Gleichung 1 und Gleichung 2 gleich setzen.
$\iint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV$

Gleichung 3 verwenden (Gauß'sche Gleichung Elektrostatik).

$$\boxed{\iint_{(A)} \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV}$$

5 Lösung Teil (a)

5.1 $0 \leq r \leq R_1$

Anmerkung: Im inneren der Hohlkugel heben sich alle Feldanteile von Q^- gegenseitig auf.

$4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot E_1 \cdot r^2 = Q^+$

$$\boxed{\vec{E_1}(r) = \frac{Q^+}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e_r}}$$

5.2 $R_1 \leq r \leq R_2$

Die Ladungsdichte ρ im Kugelmantel ist konstant.

$\rho = \frac{Q^-}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}$

$\epsilon_0 \cdot E_2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{Q^-}{(R_2^3 - R_1^3)} \cdot (r^3 - R_1^3)$

$\epsilon_0 \cdot E_2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = Q^- \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$

Elektrische Feldstärke aufgrund der Ladung in der Kugelschale.

$\vec{E_2}(r) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{Q^-}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \vec{e_r}$

Die positive Probeladung im Kugelmantel erfährt zwei Kräfte. Eine Abstoßungskraft aus der Kugelmitte durch die dort befindliche positive Ladung. Außerdem eine Anziehungskraft zur Kugelmitte. Alle negativen Ladungen die sich außerhalb $r \geq r_p$ der Probeladung befinden neutralisieren sich. Die sich vor $r < r_p$ der Probeladung befinden ziehen die Ladung zurück Richtung Mittelpunkt. Für das Feld im Kugelmantel ergibt sich daraus ein negatives Vorzeichen.

Resultierendes Feld in der Kugelschale.

$\vec{E}_2(r) = \frac{Q^-}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e_r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \vec{e_r}$

$$\boxed{\vec{E_2}(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0\cdot r^2}\cdot[1-\frac{r^3-R_1^3}{R_2^3-R_1^3}]\cdot\vec{e_r}}$$

Proben:
$\vec{E_2}(R_1) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0\cdot r^2}\cdot[1-\frac{r^3-R_1^3}{R_2^3-R_1^3}]\cdot\vec{e_r} = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0\cdot R_1^2}\cdot\vec{e_r}$

$\vec{E_2}(R_2) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0\cdot r^2}\cdot[1-\frac{r^3-R_1^3}{R_2^3-R_1^3}]\cdot\vec{e_r} = 0\cdot\vec{e_r}$

5.3 $r > R_2$

$E_3\vec{(}r) = \frac{+Q-Q}{r^2} = 0$

6 Lösung Teil (c)

6.1 Elektrostatisches Potential allgemein

6.1.1 Bestimmt

$F\vec{(}r) = E\vec{(}r)\cdot q$
$w(r_p) = \int_r^\infty F(r)\cdot dr = q\cdot\int_r^\infty E(r)\cdot dr$
$\phi(r_p) = \frac{w(r_p)}{q} = \int_r^\infty E(r)\cdot dr$

$\epsilon_0\cdot\vec{E} = \vec{D}$
$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\epsilon_0}$

6.1.2 Unbestimmt

Nullpotential im Unendlichen $\phi(\infty) = 0$

$F\vec{(}r) = E\vec{(}r)\cdot q$
$w(r_p) = -\int F(r)\cdot dr = -q\cdot\int E(r)\cdot dr + c$
$\phi(r_p) = \frac{w(r_p)}{q} = -\int E(r)\cdot dr + c$

$\epsilon_0\cdot\vec{E} = \vec{D}$
$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\epsilon_0}$

6.2 Potential im inneren der Hohlkugel $0 < r < R_1$

$D\vec{(}r) = \frac{Q}{2\cdot\pi\cdot r^2}\cdot\vec{e}_r$
$\phi_1(r) = -\int E_1(r)\cdot dr = -\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0}\int\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot r\epsilon_0} + c_1$

$$\boxed{\phi_1(r_p) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot r\cdot\epsilon_0} + c_1}$$

6.3 Potential in der Kugelschale $R_1 \leq r \leq R_2$

Die Integration, die vom el. Feld zum el. Potential führt, wird nun Schritt für Schritt durchgeführt:

$\phi_2(r) = -\int \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\phi_2(r) = -\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int [\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\phi_2(r) = -\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int [\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_2^3 - r_1^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\phi_2(r) = -\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int [\frac{1}{r^2} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{r}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\boxed{\phi_2(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [\frac{1}{r} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_2^3 - R_1^3}] + c_2}$

6.4 Ermitteln der Integrationskonstanten aus den Randbedingungen

Die Randbedingungen werden in die Integrationskonstanten der unbestimmten Integrale eingehegt.

Im inneren der Hohlkugel $0 < r \leq R_1$:
$\phi_1(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r \cdot \epsilon_0} + c_1$

Im inneren des Mantels $R_1 \leq r \leq R_2$:
$\phi_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [\frac{1}{r} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_2^3 - R_1^3}] + c_2$

Außerhalb der Kugel $R_2 \leq r < \infty$:
$\phi_3(r) = \phi_2(R_2) = 0$

Grenze Kugelaußenhaut - Außenbereich $r = R_2$:
$\phi_2(R_2) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{R_2} \cdot (1 - \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2} \frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}] + c_2 = 0$
$c_2 = -\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{R_2} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2} \frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}]$
$c_2 = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{R_2} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2} \frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

Somit:
$\phi_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [\frac{1}{r} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_2^3 - R_1^3}] + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{R_2} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2} \frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

$\phi_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2} \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

Test:
$\phi_2(R_2) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2} \frac{R_2^2 - R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}] = 0$
$\phi_3(R_2) = 0$

Grenze Hohlkugel-Kugelinnenhaut $r = R_1$:

$\phi_1(R_1) + c_1 = \phi_2(R_1)$

$\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot R_1\cdot\epsilon_0} + c_1 = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

$c_1 = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}] - \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot R_1\cdot\epsilon_0}$

$\phi_1(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot r\cdot\epsilon_0} + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}] - \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot R_1\cdot\epsilon_0}$

$\phi_1(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot (\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}) + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

Test:
$\phi_1(R_1) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot (\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1}) + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]$
$\phi_1(R_1) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]$
$\phi_2(R_1) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]$
$\phi_2(R_2) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}] = 0$

6.5 Zusammenfassung

Feld und Potential im Bereich der Hohlkugel $0 < r \leq R_1$.

$\boxed{\vec{E_1}(r) = \frac{Q}{4\cdot\epsilon_0\cdot\pi\cdot r^2} \cdot \vec{e_r}}$

$\boxed{\phi_1(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot (\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}) + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]}$

Feld und Potential im Bereich der Hohlkugel $R_1 \leq r \leq R_2$.

$\boxed{\vec{E}_2(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0\cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r}}$

$\boxed{\phi_2(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^3 - R_1^3}]}$

Feld und Potential außerhalb der Kugel $R_2 \leq r < \infty$.

$\boxed{\vec{E_3}(r) = 0 \cdot \vec{e_r}}$

$\boxed{\phi_3(r) = 0}$