Hohlkugel mit Ladung
Physiker Board
Version 4.0

gast free

10.09.2025

1 Einleitung

Die vorliegende Aufgabe stammt aus dem Physikerboard " www.physikerboard.de" Bereich Elektrik. Die Lösung wurde mehrfach überarbeitet. Vielen Dank für die vielen Tipps und Mitarbeit insbesondere vom Boardmitglied RomanGa. Die Hinweise insbesondere was die Stetigkeit der Potentialfunktionen an an den Grenzflächen betrifft, hat mir sehr geholfen. Die vorliegende Überarbeitung wurde von mir gestrafft und es wurden bei den Größen die Indizes neu sortiert. Der Innenraum $0 < r \leq R_1$ hat den Index 1, also $\phi_1(r)$ usw.. Der Kugemantel $R_1 \leq r \leq R_2$ den Index 2 und der Bereich Außerhalb den Index 3. Ich werde noch mal in Ruhe alles durchgehen und prüfen ob sich vielleicht doch noch Fehler versteckt halten. Gerne bin auch weiterhin bereit Kritiken und Anregungen anzunehmen. Ich bin aber jetzt einige Tage unterwegs und werden mich erst anschließend wieder melden. Bis dahin kann ich auch keine weiteren Korrekturen einarbeiten.

2 Aufgabe

Die Folgende, in der Grafik beschriebene, Aufgabe aus der Elektrostatik ist zu lösen.

Aufgabe 5: Elektrisches Feld von Punktladung und Hohlkugel **(12 Punkte)**

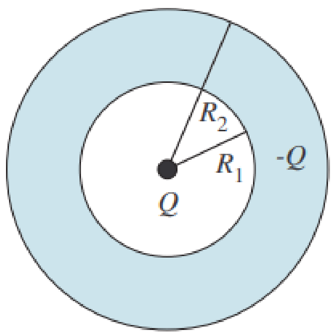
Eine Punktladung Q befindet sich im Zentrum einer Hohlkugel mit dem Innenradius R_1 und dem Außenradius R_2 (siehe Abbildung). Die Hohlkugel ist homogen geladen und trägt die Gesamtladung $-Q$.

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des Gauß'schen Gesetzes das elektrische Feld $\vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$ in den drei Bereichen

$$0 \leq r \leq R_1, \qquad R_1 \leq r \leq R_2, \qquad R_2 \leq r < \infty.$$

(b) (2 Punkte) Skizzieren Sie $E(r)$ in Abhängigkeit von r.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige elektrostatische Potential $\phi(r)$.



3 Lösungsansatz

1. $Q = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV$
2. $Q = \iint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A}$
3. $\epsilon_0 \cdot \vec{E} = \vec{D}$

Gleichung 1 und Gleichung 2 gleich setzen.
$\iint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV$

Gleichung 3 verwenden (Gauß'sche Gleichung Elektrostatik).

$$\boxed{\iint_{(A)} \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV}$$

4 Lösung Teil (a)

4.1 $0 \leq r \leq R_1$

Anmerkung: Im inneren der Hohlkugel heben sich alle Feldanteile von $-Q$ gegenseitig auf.

$4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot E_1 \cdot r^2 = Q$

$$\boxed{\vec{E_1(r)} = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e_r}}$$

4.2 $R_1 \leq r \leq R_2$

Die Ladungsdichte ρ im Kugelmantel ist konstant.

$\rho = \frac{-Q}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}$

$\epsilon_0 \cdot E_2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{-Q}{(R_2^3 - R_1^3)} \cdot (r^3 - R_1^3)$

$\epsilon_0 \cdot E_2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = -Q \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$

Elektrische Feldstärke aufgrund der Ladung in der Kugelschale.
$\vec{E_2(r)} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{-Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$

Resultierendes Feld in der Kugelschale.
$\vec{E}_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e_r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \vec{e_r}$

$$\boxed{\vec{E}_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r}}$$

Proben:
$\vec{E}_2(R_1) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_1^2} \cdot \vec{e_r}$

$\vec{E}_2(R_2) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r} = 0 \cdot \vec{e_r}$

4.3 $r > R_2$

$\vec{E_3(r)} = \frac{+Q - Q}{r^2} = 0$

5 Lösung Teil (c)

5.1 Elektrostatisches Potential allgemein

$\vec{F(r)} = \vec{E(r)} \cdot q$
$w(r_p) = \int_r^\infty F(r) \cdot dr = q \cdot \int_r^\infty E(r) \cdot dr$
$\phi(r_p) = \frac{w(r_p)}{q} = \int_r^\infty E(r) \cdot dr$

$\epsilon_0 \cdot \vec{E} = \vec{D}$
$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\epsilon_0}$

5.2 Potential im inneren der Hohlkugel $0 < r < R_1$

$\vec{D(r)} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$
$\phi_1(r) = \int E_1(r) \cdot dr = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r \epsilon_0} + c_1$

$\boxed{\phi_1(r_p) = -\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r \cdot \epsilon_0} + c_1}$

5.3 Potential in der Kugelschale $R_1 \leq r \leq R_2$

Die Integration, die vom el Feld zum el. Potential führt, wird nun Schritt für Schritt durchgeführt:

$\phi_2(r) = \int \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\phi_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int [\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\phi_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int [\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_2^3 - r_1^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\phi_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int [\frac{1}{r^2} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{r}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\boxed{\phi_2(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{r} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_2^3 - R_1^3}] + c_2}$

5.4 Ermitteln der Integrationskonstanten aus den Randbedingungen

Die Randbedingungen werden in die Integrationskonstanten der unbestimmten Integrale eingehegt.

Im inneren der Hohlkugel $0 < r \leq R_1$:
$\phi_1(r) = -\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot r\cdot\epsilon_0} + c_1$

Im inneren des Mantels $R_1 \leq r \leq R_2$:
$\phi_2(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{r} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_2^3 - R_1^3}] + c_2$

Außerhalb der Kugel $R_2 \leq r < \infty$:
$\phi_3(r) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$

Grenze Kugelaußenhaut - Außenbereich $r = R_2$:
$\phi_2(R_2) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{R_2} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2}\frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}] + c_2 = 0$
$c_2 = -\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{R_2} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2}\frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

Somit:
$\phi_2(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{r} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_2^3 - R_1^3}] - \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [-\frac{1}{R_2} \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) - \frac{1}{2}\frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

$\phi_2(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

Test:
$\phi_2(R_2) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}] = 0$
$\phi_3(R_2) = 0$

Grenze Hohlkugel-Kugelinnenhaut $r = R_1$:

$\phi_1(R_1) + c_1 = \phi_2(R_1)$

$-\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot R_1\cdot\epsilon_0} + c_1 = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

$c_1 = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}] + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot R_1\cdot\epsilon_0}$

$\phi_1(r) = -\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot r\cdot\epsilon_0} + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}] + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot R_1\cdot\epsilon_0}$

$\phi_1(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot (\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}) + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]$

Test:
$\phi_1(R_1) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot (\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1}) + \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]$
$\phi_1(R_1) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}]$
$\phi_2(R_1) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^3 - R_1^3}]$
$\phi_2(R_2) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0} \cdot [(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2}) \cdot (1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) + \frac{1}{2}\frac{R_2^2 - R_2^2}{R_2^3 - R_1^3}] = 0$

5.5 Zusammenfassung

Feld und Potential im Bereich der Hohlkugel $0 < r \leq R_1$.

$$\boxed{\vec{E_1(r)} = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e_r}}$$

$$\boxed{\phi_1(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right) + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right) + \frac{1}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3}\right]}$$

Feld und Potential im Bereich der Hohlkugel $R_1 \leq r \leq R_2$.

$$\boxed{\vec{E}_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \left[1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right] \cdot \vec{e_r}}$$

$$\boxed{\phi_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right) + \frac{1}{2} \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^3 - R_1^3}\right]}$$

Feld und Potential außerhalb der Kugel $R_2 \leq r < \infty$.

$$\boxed{\vec{E_3(r)} = 0 \cdot \vec{e_r}}$$

$$\boxed{\phi_3(r) = 0}$$