Hohlkugel mit Ladung
Physiker Board
Version 2.0

gast free

08.09.2025

1 Aufgabe

Die Folgende, in der Grafik beschriebene, Aufgabe aus der Elektrostatik ist zu lösen.

Aufgabe 5: Elektrisches Feld von Punktladung und Hohlkugel **(12 Punkte)**

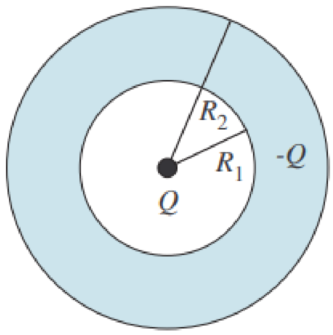
Eine Punktladung Q befindet sich im Zentrum einer Hohlkugel mit dem Innenradius R_1 und dem Außenradius R_2 (siehe Abbildung). Die Hohlkugel ist homogen geladen und trägt die Gesamtladung $-Q$.

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des Gauß'schen Gesetzes das elektrische Feld $\vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$ in den drei Bereichen

$$0 \leq r \leq R_1, \qquad R_1 \leq r \leq R_2, \qquad R_2 \leq r < \infty.$$

(b) (2 Punkte) Skizzieren Sie $E(r)$ in Abhängigkeit von r.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige elektrostatische Potential $\phi(r)$.



2 Lösungsansatz

1. $Q = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV$
2. $Q = \iint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A}$
3. $\epsilon_0 \cdot \vec{E} = \vec{D}$

Gleichung 1 und Gleichung 2 gleich setzen.
$\iint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV$

Gleichung 3 verwenden (Gauß'sche Gleichung Elektrostatik).

$\boxed{\iint_{(A)} \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV}$

3 Lösung Teil (a)

3.1 $0 \leq r \leq R_1$

Anmerkung: Im inneren der Hohlkugel heben sich alle Feldanteile von $-Q$ gegenseitig auf.

$4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot E_0 \cdot r^2 = Q$

$\boxed{\vec{E_0}(r) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e_r}}$

3.2 $R_1 \leq r \leq R_2$

Die Ladungsdichte ρ im Kugelmantel ist konstant.

$\rho = \frac{-Q}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}$

$\epsilon_0 \cdot E_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{-Q}{(R_2^3 - R_1^3)} \cdot (r^3 - R_1^3)$

$\epsilon_0 \cdot E_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = -Q \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$

Elektrische Feldstärke aufgrund der Ladung in der Kugelschale.
$\vec{E_1}(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{-Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$

Resultierendes Feld in der Kugelschale.
$\vec{E}(r) = \vec{E_0}(r) - \vec{E_1}(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e_r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \vec{e_r}$

$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r}}$

Proben:
$\vec{E}(R_1) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_1^2} \cdot \vec{e_r}$

$\vec{E}(R_2) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r} = 0 \cdot \vec{e_r}$

3.3 $r > R_2$

$\vec{E_2}(r) = \frac{+Q - Q}{r^2} = 0$

4 Lösung Teil (c)

Anmerkung: In der ursprünglichen Rechnung befand sich ein Schreib- und ein Integrationsfehler der sich in den Formeln unten fortgesetzt hat. Ich habe versucht dies zu korrigieren und veröffentliche jetzt eine zweite Version. Vielen Dank auch an RomanGa. Die Integration habe ich nach händischer Rechnung noch mal durch WolframAlpha prüfen lassen. Wenn ich nichts übersehen habe, sollte es zumindest mathematisch in Ordnung sein. Aber ich lasse mich immer gerne eines Besseren belehren.

Potential:
$\vec{F(r)} = \vec{E(r)} \cdot q$
$w(r_p) = \int_r^\infty F(r) \cdot dr = q \cdot \int_r^\infty E(r) \cdot dr$
$\phi(r_p) = \frac{w(r_p)}{q} = \int_r^\infty E(r) \cdot dr$

$\epsilon_0 \cdot \vec{E} = \vec{D}$
$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\epsilon_0}$

Potential im inneren der Hohlkugel $0 < r < R_1$:
$\vec{D(r)} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e_r}$
$\phi_0(R_1) = \int_r^{R_1} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int_{r=r_p}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [\frac{1}{r_p} - \frac{1}{R_1}]$

$\boxed{\phi_0(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [\frac{1}{r_p} - \frac{1}{R_1}]}$ Korrigiert!

Potential in der Kugelschale $R_1 \leq r \leq R_2$:
$\phi(r_p) = \int_{r=r_p}^{R_2} \vec{E_0(r)} \cdot dr - \int_{r=r_p}^{R_2} \vec{E_1(r)} \cdot dr$
$\phi(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot \int_{r=r_p}^{R_2} \frac{dr}{r^2} - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot \int_{r=r_p}^{R_2} [\frac{r}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\phi(r_p) = -\frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{r}|_{r=r_p}^{R_2} - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}]_{r=r_p}^{R_2}$

$\phi(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{r_p} - \frac{1}{R_2}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [[\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] - [\frac{1}{2} \cdot \frac{r_p^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{1}{r_p} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}]]$

$\phi(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{r_p} - \frac{1}{R_2}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_p^2}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{1}{r_p} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}]$

$\boxed{\phi(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{r_p} - \frac{1}{R_2}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2 - r_p^2}{R_2^3 - R_1^3} + (\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) \cdot (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_p})]}$

Proben:
$\phi(R_1) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} + (\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) \cdot (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})]$
$= \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} + (\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) \cdot (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})]$

$\phi(R_2) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2 - R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} + (\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) \cdot (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2})] = 0$