Hohlkugel mit Ladung
Physiker Board
Version 1.0

gast free

06.09.2025

1 Aufgabe

Die Folgende, in der Grafik beschriebene, Aufgabe aus der Elektrostatik ist zu lösen.

Aufgabe 5: Elektrisches Feld von Punktladung und Hohlkugel **(12 Punkte)**

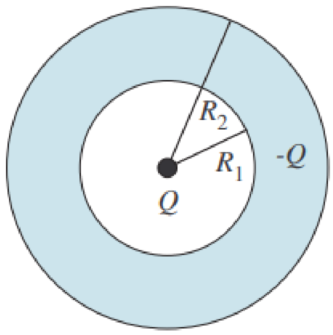
Eine Punktladung Q befindet sich im Zentrum einer Hohlkugel mit dem Innenradius R_1 und dem Außenradius R_2 (siehe Abbildung). Die Hohlkugel ist homogen geladen und trägt die Gesamtladung $-Q$.

(a) (6 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des Gauß'schen Gesetzes das elektrische Feld $\vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$ in den drei Bereichen

$$0 \leq r \leq R_1, \qquad R_1 \leq r \leq R_2, \qquad R_2 \leq r < \infty.$$

(b) (2 Punkte) Skizzieren Sie $E(r)$ in Abhängigkeit von r.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige elektrostatische Potential $\phi(r)$.



2 Lösungsansatz

1. $Q = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV$
2. $Q = \iint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A}$
3. $\epsilon_0 \cdot \vec{E} = \vec{D}$

Gleichung 1 und Gleichung 2 gleich setzen.
$\iint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV$

Gleichung 3 verwenden (Gauß'sche Gleichung Elektrostatik).

$$\boxed{\iint_{(A)} \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \rho \cdot dV}$$

3 Lösung Teil (a)

3.1 $0 \leq r \leq R_1$

Anmerkung: Im inneren der Hohlkugel heben sich alle Feldanteile von $-Q$ gegenseitig auf.

$4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot E_0 \cdot r^2 = Q$

$$\boxed{\vec{E_0}(r) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e_r}}$$

3.2 $R_1 \leq r \leq R_2$

Die Ladungsdichte ρ im Kugelmantel ist konstant.

$\rho = \frac{-Q}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}$

$\epsilon_0 \cdot E_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{-Q}{(R_2^3 - R_1^3)} \cdot (r^3 - R_1^3)$

$\epsilon_0 \cdot E_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = -Q \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$

Elektrische Feldstärke aufgrund der Ladung in der Kugelschale.
$\vec{E_1}(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{-Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$

Resultierendes Feld in der Kugelschale.
$\vec{E}(r) = \vec{E_0}(r) - \vec{E_1}(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e_r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \vec{e_r}$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r}}$$

Proben:
$\vec{E}(R_1) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_1^2} \cdot \vec{e_r}$

$\vec{E}(R_2) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot [1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot \vec{e_r} = 0 \cdot \vec{e_r}$

3.3 $r > R_2$

$\vec{E_2}(r) = \frac{+Q - Q}{r^2} = 0$

4 Lösung Teil (c)

Potential:
$\vec{F(r)} = \vec{E(r)} \cdot q$
$w(r_p) = \int_r^\infty F(r) \cdot dr = q \cdot \int_r^\infty E(r) \cdot dr$
$\phi(r_p) = \frac{w(r_p)}{q} = \int_r^\infty E(r) \cdot dr$

$\epsilon_0 \cdot \vec{E} = \vec{D}$
$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\epsilon_0}$

Potential im inneren der Hohlkugel $0 < r < R_1$:
$\vec{D(r)} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$
$\phi_0(r_p) = \int_r^{R_1} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int_{r=r_p}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r_p}]$

$\boxed{\phi_0(r_p) = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot [\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r_p}]}$

Potential in der Kugelschale $R_1 \leq r \leq R_2$:
$\phi(r_p) = \int_{r=r_p}^{R_2} \vec{E_0(r)} \cdot dr - \int_{r=r_p}^{R_2} \vec{E_1(r)} \cdot dr$
$\phi(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot \int_{r=r_p}^{R_2} \frac{dr}{r^2} - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot \int_{r=r_p}^{R_2} [\frac{r}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] \cdot dr$

$\phi(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{r}|_{r=r_p}^{R_2} - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}]_{r=r_p}^{R_2}$

$\phi(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_p}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [[\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}] - [\frac{1}{2} \cdot \frac{r_p^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{1}{r_p} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}]]$

$\phi(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_p}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_p^2}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{1}{r_p} \cdot \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}]$

$\boxed{\phi(r_p) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_p}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2 - r_p^2}{R_2^3 - R_1^3} + (\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) \cdot (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r_p})]}$

Proben:
$\phi(R_1) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} + (\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) \cdot (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})]$
$= \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} + (\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) \cdot (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})]$

$\phi(R_2) = \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2}] - \frac{Q}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot \pi} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \frac{R_2^2 - R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} + (\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}) \cdot (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2})] = 0$