

# 1 Wellenfunktion im Impulsraum

Im Ortsraum ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Volumenelement  $d^3r$  am Ort  $\mathbf{r}$  zu finden, gegeben durch  $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$ . Entsprechend sollte es einen analogen Ausdruck

$$w(\mathbf{p}, t) d^3p$$

geben, der die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass das Teilchen zur Zeit  $t$  einen Impuls im Volumenelement  $d^3p$  bei  $\mathbf{p}$  hat. Es muss wieder

$$\int d^3p w(\mathbf{p}, t) = 1$$

gelten, da das Teilchen mit Sicherheit irgendeinen Impuls hat.

Wir verwenden die Darstellung von  $\psi(\mathbf{r}, t)$  als Fourier-Integral:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \psi^*(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \hat{\psi}^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}1 &= \int d^3r |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \\ &= \int d^3k \int d^3k' \hat{\psi}^*(\mathbf{k}, t) \hat{\psi}(\mathbf{k}', t) \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}}_{\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \\ &= \int d^3k |\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)|^2 \\ &= \int \frac{d^3p}{\hbar^3} |\hat{\psi}(\mathbf{p}, t)|^2\end{aligned}$$

Es liegt deshalb nahe, die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum wie folgt zu definieren:

$$w(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{\hbar^3} \left| \widehat{\psi}(\mathbf{p}, t) \right|^2,$$

wobei  $\widehat{\psi}(\mathbf{p}, t)$  die Fourier-Transformierte der Wellenfunktion  $\psi(\mathbf{r}, t)$  ist:

$$\widehat{\psi}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \psi(\mathbf{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$$

## 2 Erwartungswerte

Wir messen  $N$ -mal den Aufenthaltsort eines Teilchens mit der Wellenfunktion  $\psi(\mathbf{r}, t)$ . Die Messwerte liegen in den Volumina  $\delta x \delta y \delta z$  an den Orten

$$\mathbf{r}_{ijk} = (x_i, y_j, z_k) = (i \cdot \delta x, j \cdot \delta y, k \cdot \delta z)$$

Dabei laufen  $i, j$  und  $k$  von  $-\infty$  bis  $\infty$ . Die Anzahl der Messwerte im Volumen  $\delta x \delta y \delta z$  am Ort  $\mathbf{r}_{ijk}$  sei  $n_{ijk}$ . Für  $N \rightarrow \infty$  ist  $n_{ijk}/N$  gleich der Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Volumen  $\delta x \delta y \delta z$  am Ort  $\mathbf{r}_{ijk}$  zu finden:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{ijk}}{N} = |\psi(x_i, y_j, z_k, t)|^2 \delta x \delta y \delta z$$

Die Bedingung  $\sum_{i,j,k} n_{ijk} = N$  entspricht die Normierung der Wellenfunktion:

$$1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j,k} \frac{n_{ijk}}{N} = \sum_{i,j,k} |\psi(x_i, y_j, z_k, t)|^2 \delta x \delta y \delta z = \int d^3r |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

Der *Erwartungswert* einer Funktion  $f(\mathbf{r})$  ist gleich dem Mittelwert der Messwerte für die

zugehörige physikalische Größe:

$$\begin{aligned}
 \langle f(\mathbf{r}) \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i,j,k} n_{ijk} f(x_i, y_j, z_k) \\
 &= \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) |\psi(x_i, y_j, z_k, t)|^2 \delta x \delta y \delta z \\
 &= \int d^3 r f(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}, t)|^2
 \end{aligned}$$

Analog wird der Erwartungswert einer Funktion  $f(\mathbf{p})$  durch

$$\langle f(\mathbf{p}) \rangle = \int d^3 p f(\mathbf{p}) \frac{1}{\hbar^3} \left| \widehat{\psi}(\mathbf{p}, t) \right|^2$$

definiert.

## 2.1 Impuls- und Ortsdarstellung

Wir versuchen, den Erwartungswert des Impulses im Ortsraum zu berechnen.

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p} \rangle &= \frac{1}{\hbar^3} \int d^3 p \widehat{\psi}^*(\mathbf{p}, t) \mathbf{p} \widehat{\psi}(\mathbf{p}, t) \\
 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p \int d^3 r \int d^3 r' \psi^*(\mathbf{r}, t) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \left( i\hbar \nabla_{r'} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'} \right) \psi(\mathbf{r}', t) \\
 &= \int d^3 r \int d^3 r' \psi^*(\mathbf{r}, t) (i\hbar \nabla_{r'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \psi(\mathbf{r}', t)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

verwendet. Wegen

$$\int d^3 r' (\nabla_{r'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \psi(\mathbf{r}', t) = -\nabla_r \psi(\mathbf{r}, t)$$

erhalten wir für den Erwartungswert des Impulses im Ortsraum:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}, t) (-i\hbar \nabla_r) \psi(\mathbf{r}, t)$$

Analog findet man für eine beliebige Funktion  $f(\mathbf{p})$ , die als Polynom in  $p_x, p_y, p_z$  geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{p}) \rangle &= \frac{1}{\hbar^3} \int d^3p \sum_{i,j,k} a_{ijk} p_x^i p_y^j p_z^k \left| \widehat{\psi}(\mathbf{p}, t) \right|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{i,j,k} a_{ijk} \int d^3p \int d^3r \int d^3r' \psi^*(\mathbf{r}, t) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \right)^i \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial y'} \right)^j \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial z'} \right)^k e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'} \right] \psi(\mathbf{r}', t) \\ &= \sum_{i,j,k} a_{ijk} \int d^3r \int d^3r' \psi^*(\mathbf{r}, t) \left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \right)^i \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial y'} \right)^j \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial z'} \right)^k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \psi(\mathbf{r}', t) \\ &= \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}, t) \sum_{i,j,k} a_{ijk} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^i \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right)^j \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right)^k \psi(\mathbf{r}, t) \\ &= \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}, t) f(-i\hbar \nabla_r) \psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$