Für die strenge Herleitung der Spin-Bahn-Wechselwirkung benutzen wir wieder den **„nicht-relativistischen Grenzfall" der Dirac-Theorie**, wobei wir die Approximation nun allerdings einen Schritt weiter treiben müssen als bei der Begründung des Spinmoments im Abschnitt zuvor. Wir hatten dort bereits Terme der Größenordnung $0\left(v^2/c^2\right)$ vernachlässigt, um die *kleine Komponente* $|\chi\rangle$ zu eliminieren und dadurch von der *Vierkomponenten-* zu einer effektiven *Zweikomponententheorie* zu kommen. Bei der Vernachlässsigung von $|\chi\rangle$, d. h. beim Übergang vom allgemeinen vierkomponentigen Zustand $|\psi\rangle$ auf die *große Komponente* $|\widehat{\psi}\rangle$, haben wir uns nicht darum gekümmert, ob die für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation wichtige Normierung erhalten bleibt. Dies wollen wir jetzt etwas genauer untersuchen:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \widehat{\psi} \\ \chi \end{pmatrix} \Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = \langle\widehat{\psi}|\widehat{\psi}\rangle + \langle\chi|\chi\rangle .$$

Wir werden dafür sorgen, dass beim Übergang zur *Zweikomponententheorie* die Normierung durch den folgenden Ansatz

$$|\widehat{\psi}\rangle = \alpha|\eta\rangle \tag{5.242}$$

erhalten bleibt. Dabei wird die Größe α Operatorcharakter haben. Wir gehen aber davon aus, was später zu kontrollieren bleibt, dass es sich um einen hermiteschen Operator mit einem existierenden Inversen α^{-1} handelt:

$$\langle\psi|\psi\rangle \stackrel{!}{=} \langle\eta|\eta\rangle = \langle\widehat{\psi}|\widehat{\psi}\rangle + \langle\chi|\chi\rangle . \tag{5.243}$$

$|\eta\rangle$ soll der $|\widehat{\psi}\rangle$ ersetzende, *neue* Zustand unserer *nicht-relativistischen Zweikomponententheorie* werden, der also die korrekte Normierung besitzt.

Wir wollen dieselbe Situation diskutieren wie bei der vorangestellten *klassischen* Überlegung, die zu (5.241) führte. Das Elektron bewege sich also in einem elektrostatischen Potential $\varphi(\boldsymbol{r})$, das von einem positiv geladenen Kern hervorgerufen werde. Ein äußeres Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ ist für die abzuleitende Spin-Bahn-Wechselwirkung unbedeutend. Es wird deshalb in diesem Abschnitt nicht berücksichtigt. Dann gilt zunächst nach (5.235) mit $\boldsymbol{A} \equiv 0$ für die *kleine Komponente* $|\chi\rangle$:

$$|\chi\rangle = \frac{c}{E + m_e c^2 + e\varphi}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})|\widehat{\psi}\rangle . \tag{5.244}$$

Die im *nicht-relativistischen* Bereich kleine Energiegröße ist nach (5.232) nicht E, sondern

$$T = E - m_e c^2 . \tag{5.245}$$

Wir substitutieren entsprechend und entwickeln (5.244) dann nach Potenzen von v/c. Dabei benutzen wir, wie später noch mehrmals, die nützliche Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \\ &(m \text{ ganz oder rational}) ,\end{aligned} \tag{5.246}$$

die für $x \ll 1$ bereits nach wenigen Termen, je nach gewünschter Genauigkeit, abgebrochen werden kann.

$$\begin{aligned}|\chi\rangle &= \frac{1}{2m_e c}\left(1 + \frac{T + e\varphi}{2m_e c^2}\right)^{-1}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})|\widehat{\psi}\rangle \\ &= \frac{1}{2m_e c}\left[1 - \frac{T + e\varphi}{2m_e c^2} + 0\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right](\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})|\widehat{\psi}\rangle .\end{aligned} \tag{5.247}$$

Damit ist die Entwicklung nun einen Schritt weiter getrieben als in (5.236). Allerdings gelingt nun auch die Entkopplung von *großer* und *kleiner Komponente* nicht mehr ganz so einfach. – Durch Einsetzen von (5.247) in (5.243) erfüllen wir die Normierungsbedingung bis auf Terme der Größenordnung $0\left(v^2/c^2\right)$:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &\overset{!}{=} \langle\eta|\eta\rangle = \langle\widehat{\psi}|\alpha^{-2}|\widehat{\psi}\rangle = \langle\widehat{\psi}|\widehat{\psi}\rangle + \langle\chi|\chi\rangle \\
&\overset{(5.247)}{=} \langle\widehat{\psi}|\left[1 + \frac{1}{4m_e c^2}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right]|\widehat{\psi}\rangle \\
&\curvearrowright \quad \alpha \approx 1 - \frac{1}{8m_e c^2}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 \; .
\end{aligned}$$

Nach der Vektorformel (5.238) ist $(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2$ gleich $p^2\mathbf{1}_2$. Die Bedingung wird offensichtlich, unserem Ansatz (5.242) entsprechend, durch