Kraft zwischen zwei Kondensatorplatten bei $Q = \text{const.}$ oder $U = \text{const.}$

Betrachte, wie sich die Feldenergie ändert bei einer Änderung des Plattenabstand x.
Für einen Plattenkondensator gelten die grundsätzlichen Gleichungen

$$C = \frac{Q}{U} \tag{1}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{2}$$

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

a) Annahme, Q sei konstant, d.h. der Kondensator sei von der Spannungquelle getrennt (im Folgenden sei x der Plattenabstand):

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}QU = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 A} \tag{5}$$

$$\Rightarrow dW_{\text{el}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}dx \tag{6}$$

Anderseits muss aufgrund der Energieerhaltung gelten

$$dW_{\text{el}} = F\,dx \tag{7}$$

Somit gilt

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2}QE \tag{8}$$

Nimmt man anderseits an, dass die Spannung U bei einer Änderung des Plattenabstands konstant bleibt (d.h., der Kondensator ist an eine Spannungquelle angeschlossen), muss auch die Energie der zu- bzw. abfliessenden Ladung berücksichtigt werden.
Bei $U = \text{const.}$ nimmt die Feldenergie ab, wenn der Plattenabstand zunimmt (denn $W_{\text{el}} = \frac{1}{2}CU^2$), im Gegensatz zum Fall $Q = \text{const.}$ Wegen $W_{\text{el}} = \frac{1}{2}QU$ muss deshalb bei einer Vergrösserung des Plattenabstand Ladung abfliessen. Diese abgeflossene Ladungsmenge dQ hat die Energie $U \cdot dQ$. Somit folgt aus der Energieerhaltung

$$dW_{\text{mech}} = dW_{\text{el}} + dW_{\text{Strom}} \tag{9}$$

Erster Summand:

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{2x} \tag{10}$$

$$dW_{\text{el}} = \frac{\mathrm{d}W_{\text{el}}}{\mathrm{d}x}dx = -\frac{2\varepsilon_0 A U^2}{4x^2}dx = -\frac{\varepsilon_0 A U^2}{2x^2}dx \tag{11}$$

Zweiter Summand: Nimmt Q ab ($dQ < 0$), so fliesst Ladung mit der Energie $dW_{\text{Strom}} = U \cdot |dQ|$ vom Kondensator ab. Es gilt deshalb

$$dW_{\text{Strom}} = -U\,dQ \tag{12}$$

Wegen

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 AU}{x} \tag{13}$$

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{\varepsilon_0 AU}{x^2} \tag{14}$$

folgt

$$dW_{\text{Strom}} = -U\,dQ = U \cdot \frac{\varepsilon_0 AU}{x^2} dx \tag{15}$$

Insgesamt erhält man also für den Fall $U = \text{const.}$:

$$dW_{\text{mech}} = dW_{\text{el}} + dW_{\text{Strom}} \tag{16}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0 AU^2}{2x^2} dx + \frac{\varepsilon_0 AU^2}{x^2} dx = \frac{\varepsilon_0 AU^2}{2x^2} dx \tag{17}$$

Da anderseits $dW_{\text{mech}} = F\,dx$, erhält man, genau wie bei der Annahme $Q = \text{const.}$,

$$F = \frac{\varepsilon_0 AU^2}{2x^2} = \frac{1}{2} QE \tag{18}$$