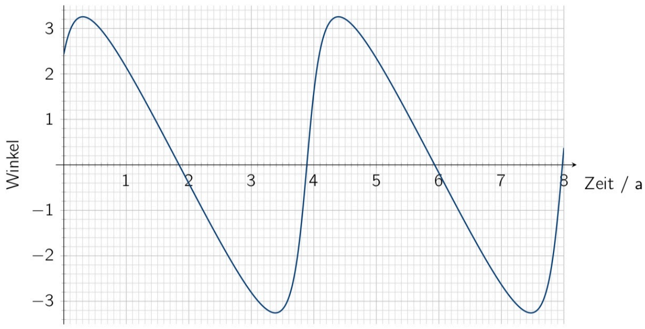
Planetenbeobachtung (1. Runde Physik-Olympiade 2025)

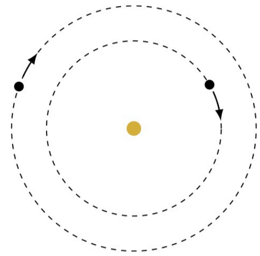
Aufgabe 2 (10 Punkte)

Planetenbeobachtung

Zwei Planeten bewegen sich, wie nebenstehend skizziert, auf kreisförmigen Bahnen in einer gemeinsamen Ebene und mit gleichem Umlaufsinn um einen Stern der Masse $M = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg. Von einem der Planeten aus hat ein Astronom den in der folgenden Abbildung dargestellten Winkel zwischen dem Zentralstern und dem anderen Planeten in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Eine Einheit auf der horizontalen Zeitachse entspricht einem Erdjahr a. Die Größe einer Einheit der Winkelachse ist nicht angegeben.



Von einem der Planeten aus gemessener Winkel zwischen dem Stern und dem anderen Planeten.



Skizze zur Planetenbeobachtung.

2.a) Zeige mit Hilfe der Daten aus dem Graphen, dass der Radius der Bahn des äußeren Planeten etwa 1,4 mal so groß ist wie der Radius der Bahn des inneren Planeten.

2.b) Gib an, welchem Winkel (in Grad) eine Einheit auf der vertikalen Achse entspricht.

2.c) Bestimme die Radien der Planetenbahnen.

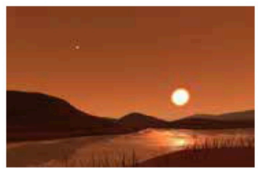


Abbildung 1: Aufgabenstellung

Zuerst stellt man fest, dass der Winkel vom äusseren Planeten aus gemessen wurde. Der Winkel vom inneren Planeten aus hätte einen anderen zeitlichen Verlauf:

- die Steigung bei den Nullstellen hätte immer den gleichen Wert, insbesondere immer das gleiche Vorzeichen
- es gäbe Unstetigkeitsstellen: der Winkel würde bei 180° das Vorzeichen wechseln. Falls anderseits der Winkel kontinuierlich gemessen würde, d.h. nicht nur mit Werten im Intervall $-180° \ldots 180°$, wäre die Kurve zwar stetig, doch es ergäbe sich nur eine Nullstelle, und der Winkel wäre nicht beschränkt.

a) Sei ω_1 die Winkelgeschwindigkeit des äusseren, ω_2 die Winkelgeschwindigkeit des inneren Planeten. Es gilt somit $\omega_2 > \omega_1$.
Mit T_1 werde die Zeit zwischen zwei Konstellationen bezeichnet, bei denen die Planeten und der Zentralkörper in gleicher Reihenfolge auf einer Geraden

liegen. Der innere Planet hat sich in dieser Zeit um den Winkel 2π weiter gedreht, es gilt somit

$$(\omega_2 - \omega_1)T_1 = 2\pi \tag{1}$$

Man kann die Situation auch in einem mit Winkelgeschwindigkeit ω_1 rotierenden Bezugssystem betrachten; in diesem Bezugssystem ruht der äussere Planet, nur der innere Planet bewegt sich mit Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 - \omega_1$.

Zwischen der Konstellation äusserer Planet - innerer Planet - Zentralkörper und der Konstellation mit maximaler Elongation vergehe die Zeit T_2. In letztgenannter Konstellation bilden die drei Körper ein Dreieck mit rechtem Winkel beim inneren Planeten, vgl. Abb. 2. Der Winkel beim Zentralkörper ist

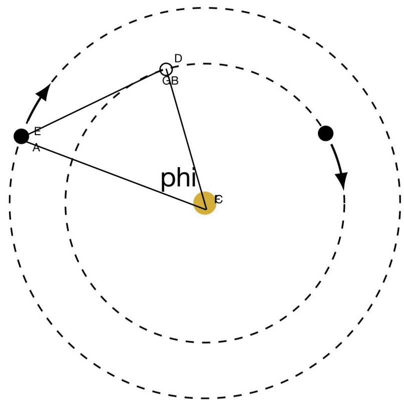


Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck bei Konstellation mit max. Elongation

$$\varphi = (\omega_2 - \omega_1)T_2 \tag{2}$$

Mit Gleichung (1) wird der Winkel zu

$$\varphi = (\omega_2 - \omega_1)T_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot 2\pi \tag{3}$$

Weiter entsprechen im erwähnten rechtwinkligen Dreieck die Bahnradien r_1, r_2 der Hypotenuse bzw. einer Kathete des Dreiecks.
Aus dem Diagramm liest man ab

$$T_1 = 4.1\,\mathrm{a} \tag{4}$$
$$T_2 = 0.5\,\mathrm{a} \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

(T_1 entspricht der Periode der Funktion. T_2 entspricht der Zeit zwischen der Nullstelle bei $t = 3.9\,\mathrm{a}$ und dem Maximum bei $t = 4.4\,\mathrm{a}$. Bei $t = 3.9\,\mathrm{a}$ stehen die Körper auf einer Gerade in der Reihenfolge äusserer Planet - innerer Planet - Zentralkörper, erkennbar an der betragsmässig grösseren Steigung verglichen mit den Nullstellen mit negativer Steigung).
Betrachtet man wieder das rechtwinklige Dreieck, das sich bei maximaler Elongation ergibt, erhält man für das Verhältnis der Bahnradien

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\cos(\varphi)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi T_2}{T_1}\right)} = 1.39 \tag{7}$$

b) Der maximale Winkel beim äusseren Planeten beträgt (vgl. Abb. 2)

$$\vartheta_{\mathrm{max}} = \pi - \phi - \frac{\pi}{2} = 0.804 \mathrel{\hat{=}} 46.1^\circ \tag{8}$$

Eine Einheit auf der vertikalen Achse entspricht somit einem Winkel von etwa $\vartheta_{\mathrm{max}}/3.3 = 14.0^\circ$.

c) 3. Keplersches Gesetz:

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{\omega_1 + (\omega_2 - \omega_1)}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{\omega_1 + \frac{2\pi}{T_1}}{\omega_1}\right)^2 \tag{9}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} = \frac{\omega_1 + \frac{2\pi}{T_1}}{\omega_1} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} - 1\right)\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} - 1\right)} \tag{12}$$

Der Bahnradius r_1 folgt nun aus dem Gravitationsgesetz:

$$m r_1 \omega_1^2 = \frac{GMm}{r_1^2} \tag{13}$$

$$\Rightarrow r_1 = \left(\frac{GM}{\omega_1^2}\right)^{1/3} = 2.837 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} = 1.896\,\mathrm{AE} \tag{14}$$

$$r_2 = r_1 \cos\left(\frac{2\pi T_2}{T_1}\right) = 2.044 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} = 1.366\,\mathrm{AE} \tag{15}$$