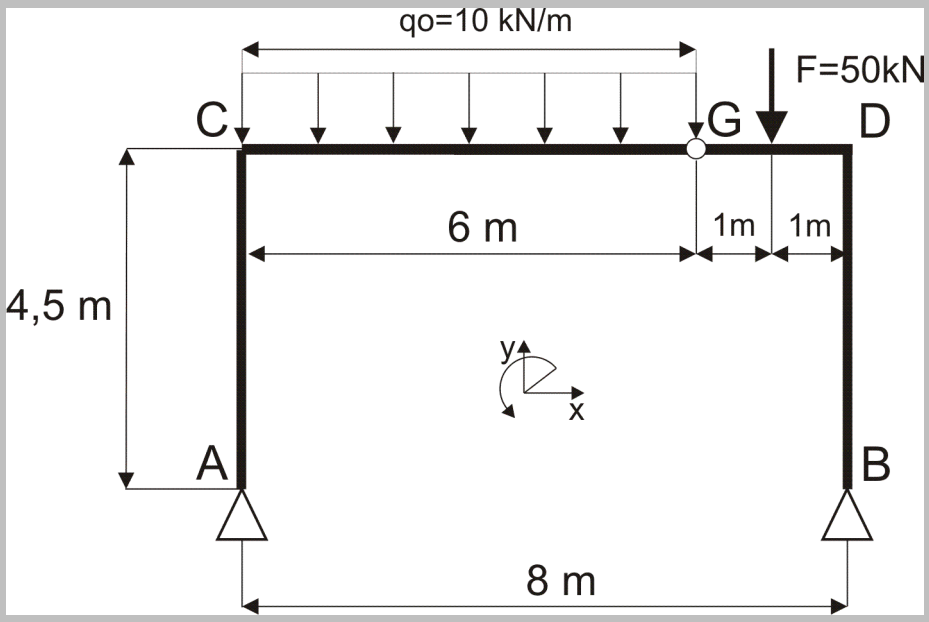
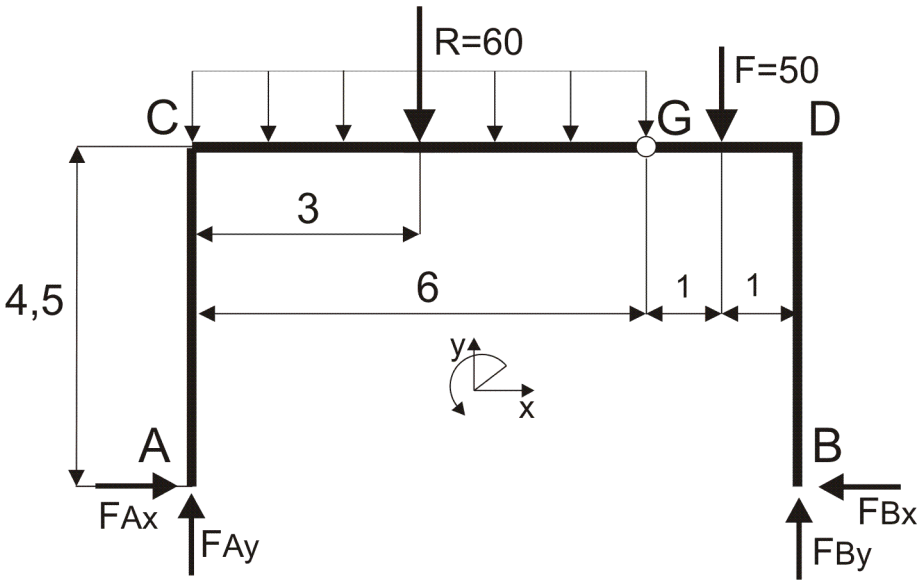
A2

Von dem skizzierten Rahmen die Auflagerreaktionen, den Normalkraftverlauf N(x), den Querkraftverlauf Q(x) und den Biegemomentenverlauf M(x) bestimmen und die Schnittgrößenverläufe in drei Diagrammen maßstäblich darstellen.
Gegeben:
qo=10 KN/m, F=50kN



Freikörperbild mit Belastung und Auflagerreaktionen (die Kräfte werden in **kN**, die Momente in **kNm** und die Abstände in **m** bei Berechnungen eingegeben)

Auflagerreaktionen:



1) $\sum \mathrm{F_x} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{F_{Ax}} - \mathrm{F_{Bx}} = 0$

2) $\sum \mathrm{F_y} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{F_{Ay}} - \mathrm{R} - \mathrm{F} + \mathrm{F_{By}} = 0$

3) $\sum \mathrm{M_A} = 0 \;\Rightarrow$

$-\mathrm{R}\cdot 3 - \mathrm{F}\cdot 7 + \mathrm{F_{By}}\cdot 8 = 0$

4) $\sum \mathrm{M_{G\,rechts}} = 0 \;\Rightarrow$

$-\mathrm{F}\cdot 1 - \mathrm{F_{Bx}}\cdot 4{,}5 + \mathrm{F_{By}}\cdot 2 = 0$

4 Unbekannten $(\mathrm{F_{Ax}}, \mathrm{F_{Ay}}, \mathrm{F_{Bx}}, \mathrm{F_{By}})$ und 4 Gleichungen bedeutet, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

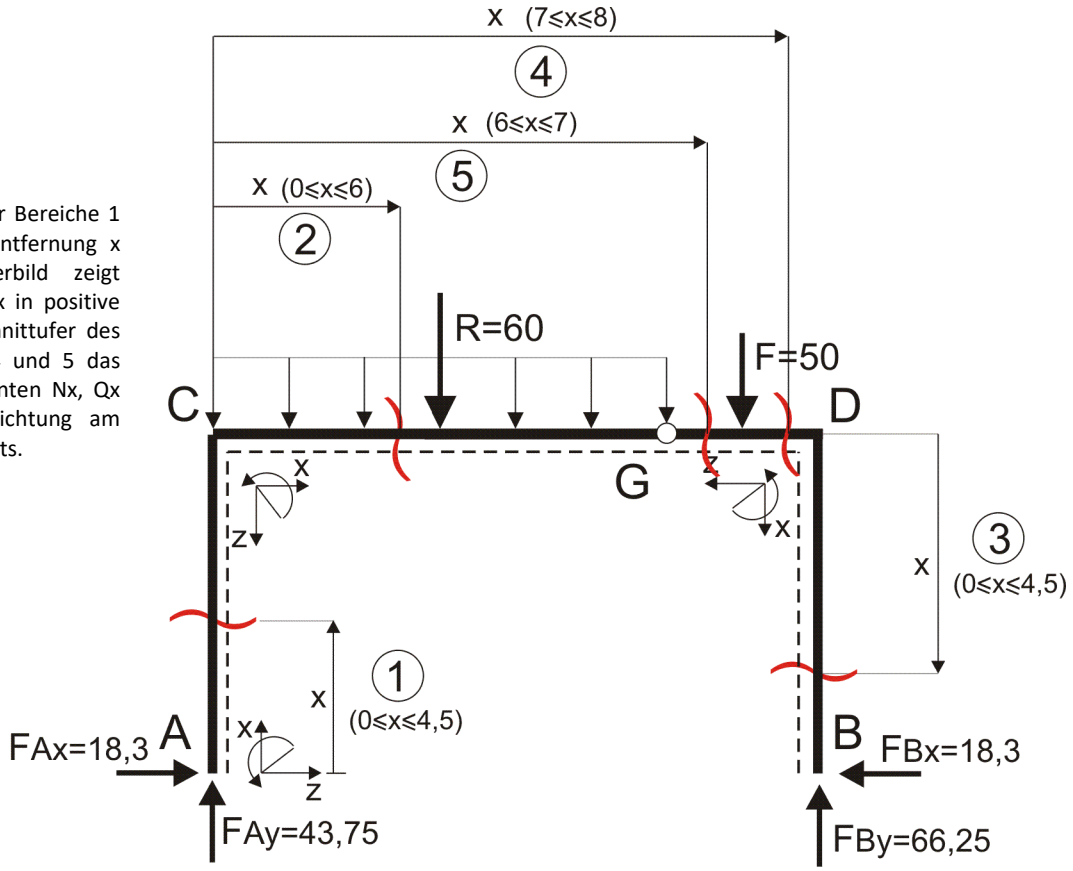
Das Gleichungssystem wird mit dem Taschenrechner gelöst $(\mathrm{F_{Ax}} = x, \mathrm{F_{Ay}} = y, \mathrm{F_{Bx}} = z, \mathrm{F_{By}} = t)$:

Aus 1), 2), 3, und 4):

$$\left.\begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - 60 - 50 + t = 0 \\ -60\cdot 50\cdot 7 + 8t = 0 \\ -50 - 4{,}5z + 2t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{F_{Ax}} = \frac{55}{3} = 18{,}333 \qquad \mathrm{F_{Ay}} = \frac{175}{4} = 43{,}75 \qquad \mathrm{F_{Bx}} = \frac{55}{3} = 18{,}333 \qquad \mathrm{F_{By}} = \frac{265}{4} = 66{,}25$$

Die Schnitte

Der Träger wird innerhalb der Bereiche 1 und 2 in einer beliebigen Entfernung x geschnitten. Das Freikörperbild zeigt Unbekannten Nx, Qx und Mx in positive Wirkrichtung am rechten Schnittufer des Segments. In Bereichen 3, 4 und 5 das Freikörperbild zeigt Unbekannten Nx, Qx und Mx in negative Wirkrichtung am linken Schnittufer des Segments.



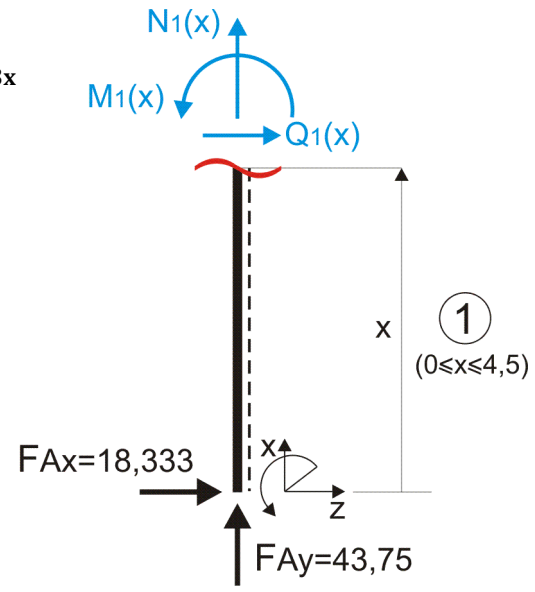
Normalkraft, Querkraft und Momentenverläufe (Freikörperbild Nr.1 für $0 \leq x \leq 4{,}5$):

$$\sum F_x = 0 \quad => \quad F_{Ay} + N_1(x) = 0 \quad => \quad \mathbf{N_1(x) = -F_{Ay} = -43{,}75}$$

$$\sum F_z = 0 \quad => \quad F_{Ax} + Q_1(x) = 0 \quad => \quad \mathbf{Q_1(x) = -F_{Ax} = -18{,}333}$$

$$\sum M_x = 0 \quad => \quad F_{Ax} \cdot x + M_1(x) = 0 \quad => \quad \mathbf{M_1(x) = -F_{Ax} \cdot x = -18{,}333x}$$

Probe: Die erste Ableitung von $M_1(x)$ muss $Q_1(x)$ ergeben:
$(-18{,}333x)' = -18{,}333 = Q_1(x)$



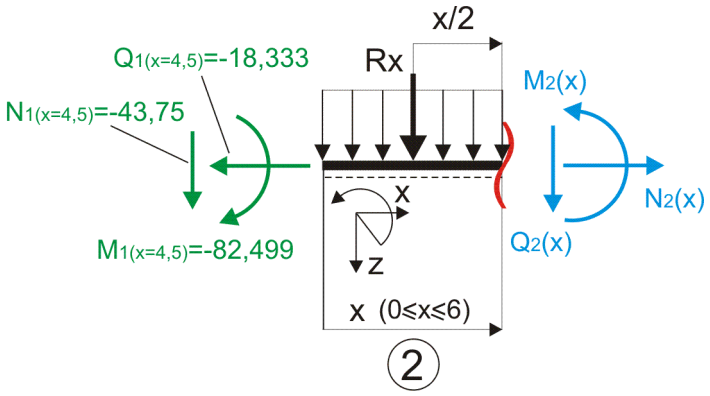
Bestimmung der Randwerte:

$N_1(x = 0) = -43{,}75$
$Q_1(x = 0) = -18{,}333$
$M_1(x = 0) = 0$

$N_1(x = 4{,}5) = -43{,}75$
$Q_1(x = 4{,}5) = -18{,}333$
$M_1(x = 4{,}5) = -18{,}333 \cdot 4{,}5 = -82{,}499$

Normalkraft, Querkraft und Momentenverläufe (Freikörperbild Nr.2 für $0 \leq x \leq 6$):

Die Grenzwerte von $N_1(x = 4{,}5)$, $Q_1(x = 4{,}5)$, $M_1(x = 4{,}5)$ vom Schnittbereich 1 werden übernommen und ihre Wirkrichtungen werden geändert.



$\sum F_x = 0 \quad => \quad N_2(x) - Q_1(x = 4{,}5) = 0 \quad =>$

$\mathbf{N_2(x)} = Q_1(x = 4{,}5) = \mathbf{-18{,}333}$

$\sum F_z = 0 \quad => \quad Q_2(x) + R_x + N_1(x = 4{,}5) = 0 \quad =>$

$\mathbf{Q_2(x)} = -R_x - N_1(x = 4{,}5) =$

$= -q_0 x - (-43{,}75) = \mathbf{-10x + 43{,}75}$

$\sum M_x = 0 \; => \; M_2(x) + q_0 x \cdot \frac{x}{2} + N_1(x = 4{,}5) \cdot x - M_1(x = 4{,}5) = 0 \quad =>$

$\mathbf{M_2(x)} = -q_0 \frac{x^2}{2} - N_1(x = 4{,}5) \cdot x + M_1(x = 4{,}5) = -10 \frac{x^2}{2} - (-43{,}75) \cdot x + (-82{,}499) =$

$= \mathbf{-5x^2 + 43{,}75x - 82{,}499}$

Probe: Die erste Ableitung von $M_2(x)$ muss $Q_2(x)$ ergeben:
$\left(\mathbf{-5x^2 + 43{,}75x - 82{,}499}\right)' = -10x + 43{,}75 = Q_2(x)$

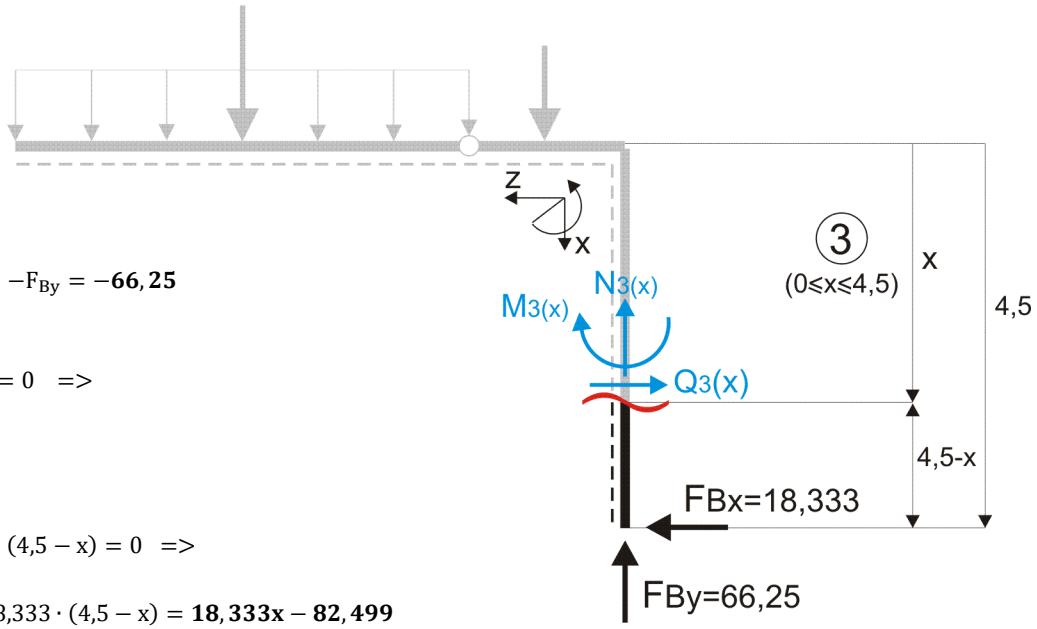
Bestimmung der Randwerte:

$N_2(x = 0) = -18{,}333$
$Q_2(x = 0) = 43{,}75$
$M_2(x = 0) = -82{,}499$

$N_2(x = 6\text{m}) = -18{,}333$
$Q_2(x = 6\text{m}) = -16{,}250$
$M_2(x = 6\text{m}) \cong 0$

Normalkraft, Querkraft und Momentenverläufe (Freikörperbild Nr.3 für $0 \leq x \leq 4{,}5$):

Das Freikörperbild zeigt Unbekannten N3x, Q3x und M3x in negative Wirkrichtung am linken Schnittufer des Segments.



$\sum F_x = 0 =>$

$-N_3(x) - F_{By} = 0 \; => \mathbf{N_3(x)} = -F_{By} = \mathbf{-66{,}25}$

$\sum F_z = 0 \quad => \quad -Q_3(x) + F_{Bx} = 0 \quad =>$

$\mathbf{Q_3(x)} = F_{Bx} = \mathbf{18{,}333}$

$\sum M_x = 0 \; => \; -M_3(x) - F_{Bx} \cdot (4{,}5 - x) = 0 \quad =>$

$M_3(x) = -F_{Bx} \cdot (4{,}5 - x) = -18{,}333 \cdot (4{,}5 - x) = \mathbf{18{,}333x - 82{,}499}$

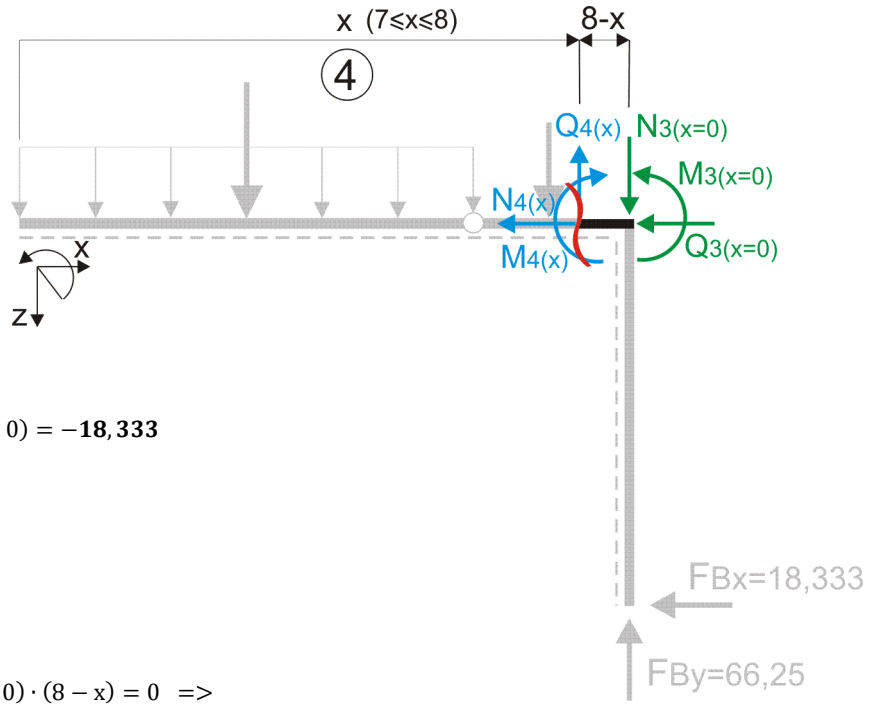
Probe: Die erste Ableitung von $M_3(x)$ muss $Q_3(x)$ ergeben:
$(18{,}333\mathrm{x} - 82{,}499\ )' = 18{,}333 = Q_3(x)$
Bestimmung der Randwerte:

$\mathrm{N_3(x = 0) = -66{,}25}$
$\mathrm{Q_3(x = 0) = 18{,}333}$
$\mathrm{M_3(x = 0) = -82{,}499}$

$\mathrm{N_3(x = 4{,}5) = -66{,}25}$
$\mathrm{Q_3(x = 4{,}5) = 18{,}333}$
$\mathrm{M_3(x = 4{,}5) \cong 0}$

Normalkraft, Querkraft und Momentenverläufe (Freikörperbild Nr.2 für $7 \leq \mathrm{x} \leq 8$):

Die Grenzwerte von $\mathrm{N_3(x = 0)}$, $\mathrm{Q_3(x = 0)}$, $\mathrm{M_3(x = 0)}$ vom Schnittbereich 3 werden übernommen und ihre Wirkrichtungen werden geändert.



$\sum \mathrm{F_x = 0 =>}$

$\mathrm{-N_4(x) - Q_3(x = 0) = 0 =>} \ \mathbf{N_4(x) = -Q_3(x = 0) = -18{,}333}$

$\sum \mathrm{F_z = 0 \ => \ -Q_4(x) + N_3(x = 0) = 0 \ =>}$

$\mathbf{Q_4(x) = N_3(x = 0) = -66{,}25}$

$\sum \mathrm{M_x = 0 \ => \ -M_4(x) + M_3(x = 0) - N_3(x = 0) \cdot (8 - x) = 0 \ =>}$

$\mathrm{M_4(x) = -N_3(x = 0) \cdot (8 - x) + M_3(x = 0) = -(-66{,}25) \cdot (8 - x) + (-82{,}499) =}$
$\mathrm{= \mathbf{-66{,}25x + 447{,}501}}$

Probe: Die erste Ableitung von $M_4(x)$ muss $Q_4(x)$ ergeben:
$(-66{,}25\mathrm{x} + 447{,}501\ )' = -66{,}25 = Q_4(x)$

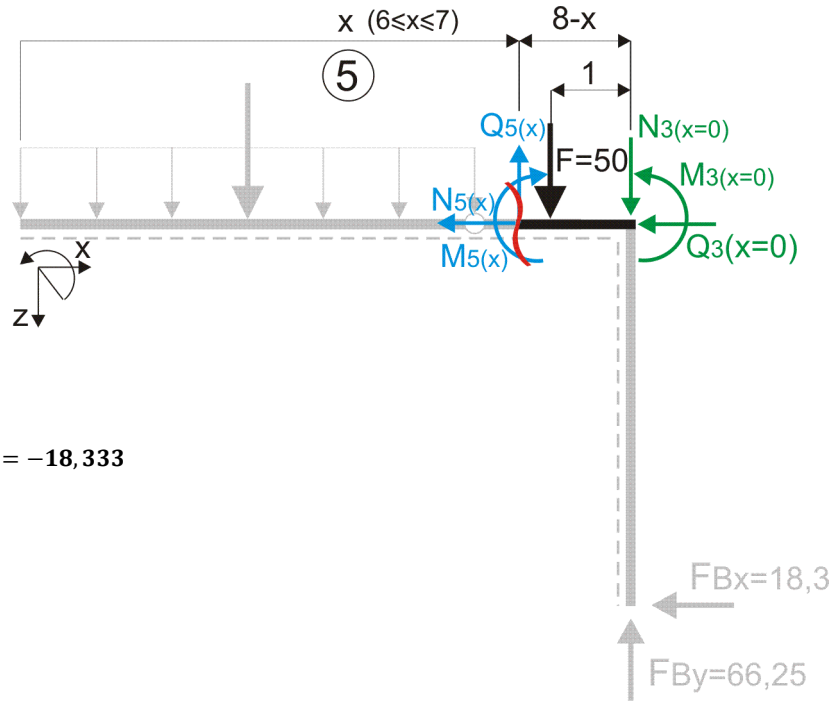
Bestimmung der Randwerte:

$\mathrm{N_4(x = 8) = -18{,}333}$
$\mathrm{Q_4(x = 8) = -66{,}25}$
$\mathrm{M_4(x = 8) = -82{,}499}$

$\mathrm{N_4(x = 7 = -18{,}333}$
$\mathrm{Q_4(x = 7) = -66{,}25}$
$\mathrm{M_4(x = 7) = -16{,}249}$

Normalkraft, Querkraft und Momentenverläufe (Freikörperbild Nr.2 für $6 \leq x \leq 7$):

Die Grenzwerte von $N_3(x=0)$, $Q_3(x=0)$, $M_3(x=0)$ vom Schnittbereich 3 werden übernommen und ihre Wirkrichtungen werden geändert.



$\sum F_x = 0 =>$

$-N_5(x) - Q_3(x=0) = 0 \Rightarrow \mathbf{N_5(x)} = -Q_3(x=0) = \mathbf{-18,333}$

$\sum F_z = 0 \Rightarrow -Q_5(x) + N_3(x=0) + F = 0 \Rightarrow$

$\mathbf{Q_5(x)} = N_3(x=0) + F = -66,25 + 50 = \mathbf{-16,25}$

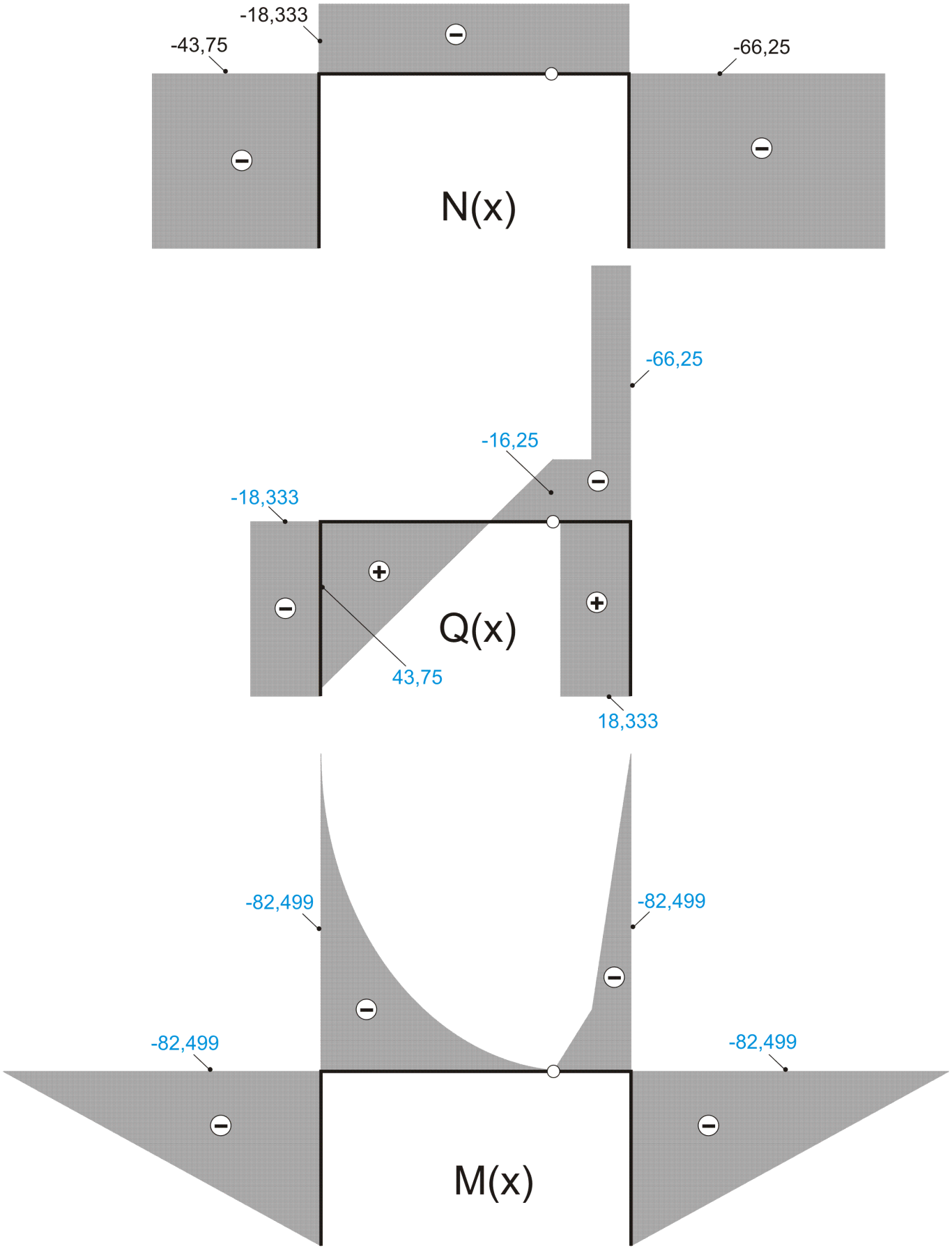
$\sum M_x = 0 \Rightarrow -M_5(x) + M_3(x=0) - N_3(x=0) \cdot (8-x) - F \cdot (7-x) = 0 \Rightarrow$

$M_5(x) = -N_3(x=0) \cdot (8-x) + M_3(x=0) - F \cdot (7-x) = -(-66,25) \cdot (8-x) + (-82,499) - 50(7-x) =$
$= \mathbf{-16,25x + 97,501}$

Probe: Die erste Ableitung von $M_5(x)$ muss $Q_5(x)$ ergeben:
$(-16,25x + 97,501\ )' = -16,25 = Q_5(x)$

Bestimmung der Randwerte:

$N_5(x=7) = -18,333$
$Q_5(x=7) = -16,25$
$M_5(x=7) = -16,249$

$N_5(x=6) = -18,333$
$Q_5(x=6) = -16,25$
$M_5(x=6) \cong 0$

Verlauf der Schnittgrößen: