Beweis: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})] = [\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]^2$

$$(\vec{a}\times\vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{3}\sum^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k} \quad \Big| \quad [\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})}_{e}\times\underbrace{(\vec{c}\times\vec{a})}_{f}] = \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{jlm}\, e_l f_m$$

$$e_l = \sum_{v,w=1}^{3} \varepsilon_{lvw}\, b_v c_w$$

$$f_m = \sum_{s,t=1}^{3} \varepsilon_{mst}\, c_s a_t$$

$$\sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{ilm} \sum_{v,w=1}^{3} \varepsilon_{lvw}\, b_v c_w \sum_{s,t=1}^{3} \varepsilon_{mst}\, c_s a_t$$

$$= \sum_{l,m,v,w,s,t=1}^{3} \varepsilon_{ilm}\, \varepsilon_{lvw}\, b_v c_w\, \varepsilon_{mst}\, c_s a_t$$

Multiplizieren mit $\vec{a}\times\vec{b}$ von oben ↑

$$= \sum_{i,j,k,l,m,v,w,s,t}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k\, \varepsilon_{ilm}\, \varepsilon_{lvw}\, b_v c_w\, \varepsilon_{mst}\, c_s a_t$$

Nebenrechnung: $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm}\;\varepsilon_{lvw}\,\varepsilon_{mst}$

$$\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{lk}$$

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{lk})\, \varepsilon_{lmv}\, \varepsilon_{mst}\, a_j b_k b_v c_w c_s a_t$$

$$= \delta_{jl}\delta_{km}\, \varepsilon_{lvw}\varepsilon_{mst}\, a_j b_k b_v c_w c_s a_t - \delta_{jm}\delta_{lk}\, \varepsilon_{lvw}\varepsilon_{mst}\, a_j b_k b_v c_w c_s a_t$$

Durch das Kronecker Delta kann man hier den Term vereinfachen, indem alle „j" zu „l", alle „k" zu „m" werden, analog die Rechte Seite.

$$= \varepsilon_{lmv}\,\varepsilon_{mst}\, a_l b_m b_v c_w c_s a_t - \varepsilon_{kvw}\,\varepsilon_{mst}\, a_m b_k b_v c_w c_s a_t$$

$$= a_l\, \varepsilon_{lvw}\, b_v c_w\, \varepsilon_{mst}\, a_t b_m c_s \qquad -\varepsilon_{mst}\, a_m c_s a_t \mathrel{\hat{=}} \vec{a}(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= -\varepsilon_{smt}\, a_m c_s a_t \mathrel{\hat{=}} c(\vec{a}\times\vec{a}) = 0$$

$$= \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) - \varepsilon_{tsm}\, a_t b_m c_s$$

$$= \varepsilon_{tms}\, a_t b_m c_s$$

$$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$= a(\vec{b}\times\vec{c}) \cdot \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})]^2 - 0 = \underline{\underline{[\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})]^2}} \quad \text{q.e.d}$$

b)