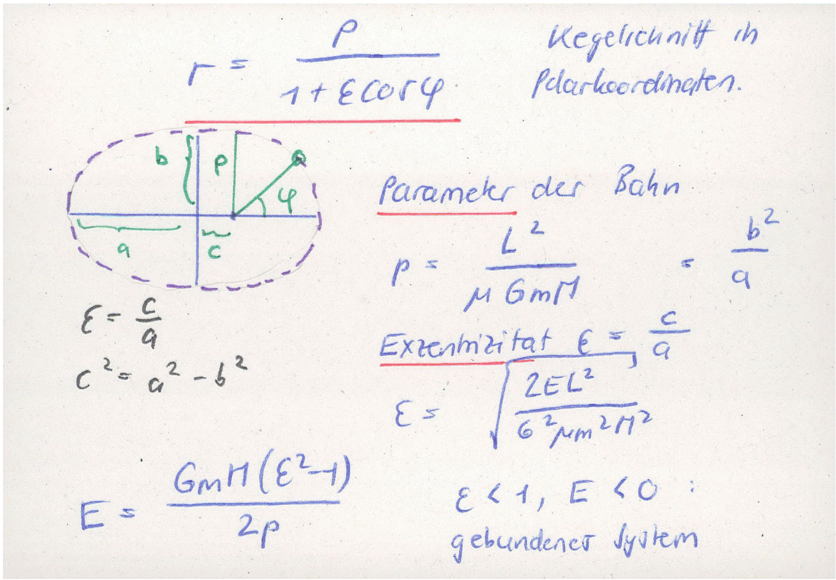
Parameter, Drehimpuls und Energie von Kepler-Bahnen



1. Beh.: $c^2 = a^2 - b^2$

Betrachte Dreiecke, die durch einen Faden der Länge $2a$ gebildet werden, der an den beiden Brennpunkten festgehalten wird (alle erreichbaren Punkte ergeben die Ellipse). Es ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten b, c (vom Ursprung aus) und Hypotenuse a.

2. Beh.: $p = \frac{b^2}{a}$

Betrachte wiederum ein rechtwinkliges Dreieck, nun mit den Katheten $2c$, p und der Hypotenuse $2a - p$.

$$(2a - p)^2 = 4c^2 + p^2 \tag{1}$$

$$4a^2 - 4ap = 4c^2 = 4a^2 - 4b^2 \quad \text{(Beh.1)} \tag{2}$$

$$ap = b^2 \tag{3}$$

$$p = \frac{a^2}{b} \tag{4}$$

3. Geschwindigkeiten am Perihel und Aphel

Betrachte die Punkte Perihel und Aphel. Energieerhaltung:

$$\frac{m}{2}v_{\mathrm{P}}^2 - G\frac{Mm}{r_{\mathrm{P}}} = \frac{m}{2}v_{\mathrm{A}}^2 - G\frac{Mm}{r_{\mathrm{A}}} \tag{5}$$

$$v_{\mathrm{P}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_{\mathrm{P}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}}\right) \tag{6}$$

Mit $r_{\mathrm{P}} = a(1-\varepsilon)$, $r_{\mathrm{A}} = a(1+\varepsilon)$:

$$\frac{1}{r_{\mathrm{P}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \tag{7}$$

$$= \frac{2\varepsilon}{a(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)} = \frac{2\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)} \tag{8}$$

Drehimpulserhaltung Aphel, Perihel:

$$m r_{\mathrm{P}} v_{\mathrm{P}} = m r_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} \tag{9}$$

$$v_{\mathrm{A}} = \frac{r_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{A}}} v_{\mathrm{P}} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} v_{\mathrm{P}} \tag{10}$$

Eingesetzt in die Energieerhaltung:

$$v_{\mathrm{P}}^2\left[1 - \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right] = 2GM\left(\frac{1}{r_{\mathrm{P}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}}\right) = 4GM\frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)} \tag{11}$$

$$v_{\mathrm{P}}^2 \cdot \left[(1+\varepsilon)^2 - (1-\varepsilon)^2\right] = 4GM\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)} \tag{12}$$

$$v_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \quad v_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tag{13}$$

4. Drehimpuls L

$$L^2 = m r_{\mathrm{P}} v_{\mathrm{P}} m r_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} = m^2 a^2 (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)\frac{GM}{a} \tag{14}$$

$$L = m\sqrt{GMa(1-\varepsilon^2)} \tag{15}$$

5. (Halb-)Parameter der Bahn p

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2) = \frac{L^2}{GMm^2} \tag{16}$$

6. Energie E

$$\begin{aligned}
E &= \frac{m}{2} v_{\mathrm{P}}^2 - \frac{GMm}{r_{\mathrm{P}}} && (17) \\
&= \frac{m}{2} \frac{GM}{a} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \frac{GMm}{a(1 - \varepsilon)} && (18) \\
&= -\frac{GMm}{2a} && (19) \\
&= -\frac{GMm(1 - \varepsilon^2)}{2p} && (20) \\
&= -\frac{G^2 M^2 m^3 (1 - \varepsilon^2)}{2L^2} && (21)
\end{aligned}$$

Von allen Planetenbahnen mit einem bestimmten Drehimpuls L ist die Kreisbahn diejenige, welche die kleinste Energie besitzt.