Wir wollen uns noch überlegen, wie sich die Komponenten der Kraft transformieren lassen beim Übergang von einem Bezugssystem S, in dem ein Teilchen die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ hat und die Masse $m = m_0 \cdot \gamma$, zu einem System S^*, das sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u} = +\boldsymbol{v}$ gegen S bewegt, in dem daher gilt: $v^* = 0$, $m^* = m_0$. Wir legen die Achsen von S so, dass $\boldsymbol{v} = \{v_x, 0, 0\}$. Dann gilt im System S gemäß (4.44) wegen $\hat{\boldsymbol{e}}_v = \hat{\boldsymbol{e}}_a$:

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = \gamma^3 m_0 a_x \,. \tag{4.45c}$$

Im System S^* wird die x-Komponente der Beschleunigung:

$$a_x^* = \gamma^3 \cdot a_x \,,$$

wie man mit Hilfe von (3.26) und (3.28) nachprüfen kann. Deshalb kann die Kraftkomponente im System S^* ($v^* = 0$, $m^* = m_0$) geschrieben werden als:

$$F_x^* = m_0 \cdot a_x^* = \gamma^3 m_0 \cdot a_x \equiv F_x \,. \tag{4.45d}$$

Wir erhalten also das bemerkenswerte Ergebnis, dass die Kraftkomponenten für die x-Richtung, in der sich die beiden Systeme gegeneinander bewegen, gleich sind!

Dies gilt nicht für die dazu senkrechten Kraftkomponenten. Es gilt für $v_y \ll v_x$:

$$F_y = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \gamma m_0 a_y \,.$$

Aus (3.26) und (3.28) folgt: $a_y^* = \gamma^2 a_y$ und deshalb gilt:

$$F_y^* = m_0 \cdot a_y^* = \gamma^2 m_0 a_y = \gamma \cdot F_y \,. \tag{4.45e}$$

Wir erhalten also:

$$\frac{F_x}{F_y} = \gamma^2 \cdot \frac{a_x}{a_y} \,, \tag{4.45f}$$

was uns wiederum, wie schon (4.44) zeigt, dass die Kraft für $\gamma \neq 1$ nicht parallel zur Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ ist.

4.4.3 Die relativistische Energie

In der klassischen Mechanik ändert sich die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2$$

eines Teilchens, wenn man seine Bewegung in verschiedenen Inertialsystemen beschreibt, da sich v ändert.

Damit der Erhaltungssatz der Energie unabhängig vom gewählten Bezugssystem gültig bleibt, muss die Gesamtenergie eines Teilchens so definiert werden, dass sie *Lorentz-invariant* wird, d. h. dass sie bei einer Lorentz-Transformation erhalten bleibt (siehe Abschn. 3.3).

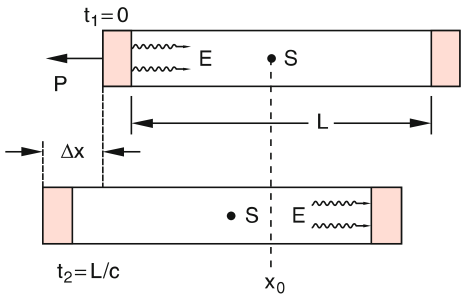

Abbildung 4.30 Einsteins Gedankenexperiment zur Herleitung von $E = m \cdot c^2$

Wir wollen zuerst eine „anschauliche“ Herleitung vorstellen, die auf einem Gedankenexperiment Einsteins basiert: Wir betrachten in Abb. 4.30 einen Kasten der Länge L und der Masse M.

Von der linken Wand soll zur Zeit $t_1 = 0$ ein Lichtblitz mit der Lichtenergie E ausgesandt werden, der sich mit der Lichtgeschwindigkeit c nach rechts bewegt. Dieser Lichtblitz hat nach experimentellen Ergebnissen der klassischen Physik (siehe Bd. 2) den Impuls $p = E/c$. Wegen der Impulserhaltung erhält die linke Wand, und damit der ganze Kasten, zur Zeit $t_1 = 0$ den Rückstoßimpuls $p = -E/c$, der zur Bewegung des Kastens nach links mit der Geschwindigkeit

$$v = -\frac{p}{M} = -\frac{E}{Mc}$$

führt. Für $v \ll c$ erreicht der Lichtblitz die rechte Wand des Kastens nach der Zeit $t_2 = L/c$, wird dort absorbiert und überträgt dabei den Impuls $p = +E/c$ auf den Kasten, der dadurch wieder zur Ruhe kommt. Während dieser Zeit hat sich der Kasten nach links um die Strecke Δx bewegt, wobei

$$\Delta x = -vt_2 = \frac{EL}{Mc^2} \,. \tag{4.46}$$

Da aber der Schwerpunkt unseres abgeschlossenen Systems, der vor der Emission des Lichtblitzes in Ruhe war, immer in Ruhe bleiben muss (es wirken keine äußeren Kräfte!), muss durch den Transport der Lichtenergie E auch ein Massentransport stattgefunden haben, der dafür sorgt, dass der Schwerpunkt des Systems sich nicht verändert, obwohl der Kasten sich nach links bewegt hat. Schreiben wir der Lichtenergie E die Masse m zu, so ergibt sich, dass die Masse m um die Strecke L nach rechts bewegt wurde, die Kastenmasse M nach links um die Strecke Δx. Damit der Schwerpunkt sich dabei nicht bewegt, muss gelten:

$$mL - M\Delta x = 0 \,, \tag{4.47}$$

woraus mit (4.46) folgt:

$$m = E/c^2 \Rightarrow E = mc^2 \,. \tag{4.48a}$$

Nach dieser Überlegung entspricht jeder Masse m die Energie $E = mc^2$. Energie und Masse sind einander proportional!