Der Grenzwert für $\Delta\vec{\mathbf{s}}_i \to \vec{\mathbf{0}}$ bzw. $n \to \infty$ liefert dann wieder das exakte Ergebnis

$$\int_{P_A}^{P_B} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{\mathbf{E}}(x_i, y_i, z_i)\right| \left|\Delta\vec{\mathbf{s}}_i\right| \cos(\alpha_i) . \tag{C.7}$$

Zum besseren Verständnis betrachten wir ein einfaches Beispiel aus der Physik. Eine kleine Kugel rollt, von einer Laufrille geführt, auf einem halbkreisförmigen Bogen vom Anfangspunkt P_A zum Endpunkt P_B. Gleichzeitig wirkt auf die Kugel eine ortsunabhängige Kraft $\vec{\mathbf{F}}$ in Richtung der Verbindungslinie der beiden Punkte P_A und P_B (▶Abb. C.3). Wir wollen die Frage untersuchen, welche Arbeit an der Kugel infolge der Kraft $\vec{\mathbf{F}}$ verrichtet wird.

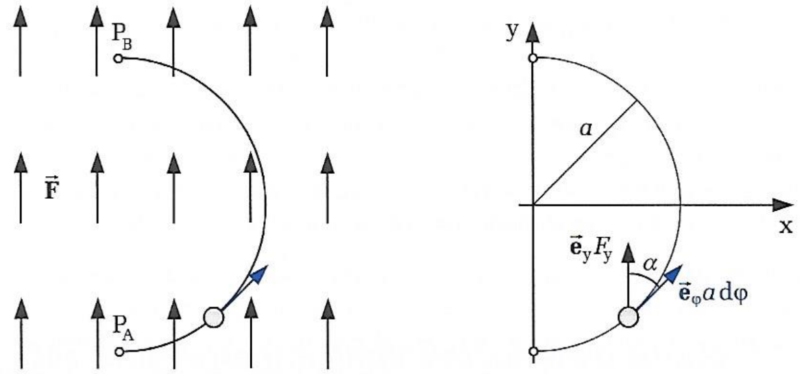

Abbildung C.3: Bewegungsvorgang im Kraftfeld

Zur Beschreibung des Bewegungsvorgangs wählen wir das zylindrische Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Kreises. Die Kugel bewegt sich in Richtung wachsender φ-Werte auf einem Halbkreis mit konstantem Radius $\rho = a$. Die vorgegebene Kraft lässt sich am einfachsten mit einer kartesischen Komponente $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{e}}_y F_y$ beschreiben. An jeder Stelle auf dem Halbkreis ist der Winkel α zwischen der Bewegungsrichtung $\vec{\mathbf{e}}_\varphi$ und der Kraftrichtung $\vec{\mathbf{e}}_y$ bekannt. Um die von $\vec{\mathbf{F}}$ längs des Kreisbogens geleistete Arbeit W zu bestimmen, muss die Kraft in zwei Komponenten zerlegt werden, eine Komponente in Richtung der Bewegung $\vec{\mathbf{e}}_\varphi$ und eine weitere senkrecht dazu in Richtung $\vec{\mathbf{e}}_\rho$. Da nur die in Richtung der Bewegung wirkende Kraftkomponente einen Beitrag zur Arbeit leistet, benötigen wir das Skalarprodukt aus der vektoriellen Kraft und dem gerichteten Wegelement, dessen Integration vom Anfangspunkt P_A bis zum Endpunkt P_B mit Gl. (C.7) das nachstehende Ergebnis liefert

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_A}^{P_B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \vec{\mathbf{e}}_y F_y \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi a \, d\varphi \\ &= aF_y \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_\rho \sin\varphi + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \cos\varphi\right)}_{\vec{\mathbf{e}}_y} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi \, d\varphi = aF_y \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi = 2aF_y . \end{aligned} \tag{C.8}$$