

4.1 Maxwell-Gleichungen

Die Kap. 2 und 3 haben gezeigt, dass sich elektrostatische und magnetostatische Probleme völlig unabhängig voneinander behandeln lassen. Gewisse formale Analogien erlauben zwar, weitgehend identische Rechentechniken zur Lösung der Grundaufgaben anzuwenden, führten jedoch nicht zu einer direkten Abhängigkeit. Dies wird nun anders bei der Betrachtung von zeitabhängigen Phänomenen, d. h., die Entkopplung von magnetischen und elektrischen Feldern wird aufgehoben. Man sollte deshalb ab jetzt von **elektromagnetischen** Feldern reden. Verständlich wird die enge Korrelation zwischen magnetischen und elektrischen Feldern im Rahmen der Relativitätstheorie.

4.1 Maxwell-Gleichungen

Wir wollen zunächst die fundamentalen Feldgleichungen der **Elektrostatik**

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

bzw. der **Magnetostatik**

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

auf zeitabhängige Phänomene verallgemeinern. Dabei soll wiederum eine experimentell eindeutig verifizierte Tatsache den Ausgangspunkt unserer Überlegungen bilden.

4.1.1 Faraday'sches Induktionsgesetz

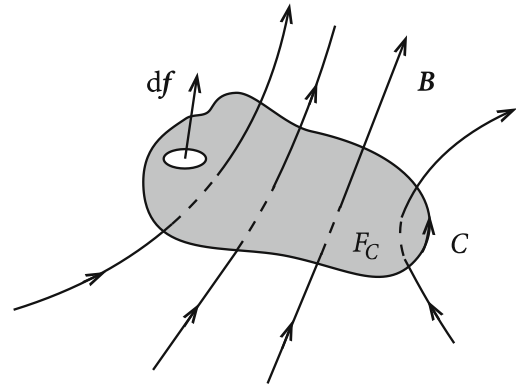
Das Biot-Savart-Gesetz (3.23) enthält die Aussage, dass eine Stromdichte $\mathbf{j}$ eine magnetische Induktion $\mathbf{B}$ erzeugt. Faraday befasste sich im Jahre 1831 mit dem Problem, ob umgekehrt mithilfe von $\mathbf{B}$ auch Strom erzeugt werden kann. Seine berühmten Experimente zum Verhalten von Strömen in zeitlich veränderlichen Magnetfeldern führten zu den folgenden Beobachtungen: In einem Leiterkreis C_1 wird ein Strom erzeugt, wenn

1. relativ zu diesem ein permanenter Magnet bewegt wird,
2. ein zweiter, von konstantem Strom durchflossener Leiterkreis C_2 relativ zu C_1 bewegt wird,
3. der Strom im (relativ zu C_1 „ruhenden“) Leiterkreis C_2 geändert wird.

Die direkte experimentelle Beobachtung betrifft elektrische Ströme. Im Gültigkeitsbereich des *Ohm'schen Gesetzes* (3.9),

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} ,$$

Abb. 4.1 Skizze zur Definition des magnetischen Flusses



überträgt sich diese unmittelbar auf elektrische Felder. Wir wollen die Faraday'schen Beobachtungen in einer mathematischen Formel zusammenfassen.

Definition 4.1.1

Elektromotorische Kraft EMK:

$$\text{EMK} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} , \quad (4.1)$$

Magnetischer Fluss durch die Fläche F_C :

$$\Phi = \int_{F_C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} . \quad (4.2)$$

Die Faraday'schen Experimente *beweisen* die Proportionalität zwischen $\dot{\Phi}$ und EMK. **Faraday'sches Induktionsgesetz:**

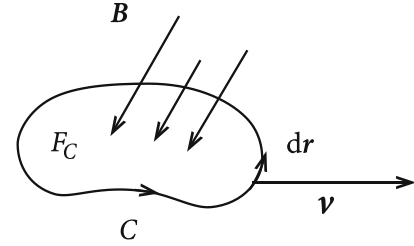
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -k \frac{d}{dt} \int_{F_C} \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{f} . \quad (4.3)$$

Dabei ist $\mathbf{E}$ als das elektrische Feld in dem („mitbewegten“) Koordinatensystem, in dem der Leiterkreis C „ruht“, zu verstehen. $\mathbf{B}'$ ist die magnetische Induktion im („festen“) Laborsystem und $\frac{d}{dt}$ vermittelt die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife aus Sicht des „mitbewegten“ Beobachters.

Das Gesetz (4.3) gilt nicht nur, wenn C ein tatsächlicher Leiterkreis ist, sondern auch dann, wenn C eine fiktive, geschlossene, geometrische Schleife darstellt.

Wir müssen jedoch noch die Proportionalitätskonstante k festlegen. Dazu benutzen wir die folgende Überlegung: Der Stromkreis C , in dem der induzierte Strom beobachtet wird,

Abb. 4.2 Einfache Anordnung (magnetische Induktion, geschlossener Stromkreis) zur Festlegung der Konstanten k im Faraday'schen Induktionsgesetz (4.3)



bewege sich mit der nach Richtung und Betrag konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zum Labor (Abb. 4.2). Im Labor liege die (evtl. zeitabhängige) magnetische Induktion $\mathbf{B}'$ vor. Dagegen ist, wie erwähnt, im Faraday'schen Induktionsgesetz (4.3) mit $\mathbf{E}$ das Feld bei $\mathbf{r}$ im „mitbewegten“ Bezugssystem gemeint, in dem das Leiterelement $d\mathbf{r}$ „ruht“. Die totale Zeitableitung auf der rechten Seite von (4.3) bezieht sich auf die Sicht des mit C „mitbewegten“ Beobachters und kann deshalb auf zwei Arten beitragen:

$$\frac{d}{dt}: \quad \begin{array}{l} 1) \text{ explizite zeitliche } \mathbf{B}'\text{-Änderung ,} \\ 2) \text{ Positionsänderung des Leiterkreises .} \end{array}$$

Formal sieht man dies wie folgt. Es gilt für die zeitliche Änderung von $\mathbf{B}'$ aus Sicht des mitbewegten Beobachters:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}' = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}'$$

und auch

$$\text{rot}(\mathbf{B}' \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}' - (\mathbf{B}' \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{B}' \text{ div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{B}' = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}' ,$$

da $\mathbf{v}$ nach Richtung und Betrag konstant sein soll. Dies bedeutet:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}' = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}' + \text{rot}(\mathbf{B}' \times \mathbf{v}) .$$

Der Stokes'sche Satz liefert:

$$\int_{F_C} d\mathbf{f} \cdot \text{rot}(\mathbf{B}' \times \mathbf{v}) = \oint_C d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{B}' \times \mathbf{v}) = \oint_C \mathbf{B}' \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r}) .$$

Für die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses gilt also:

$$\frac{d}{dt} \int_{F_C} \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{f} = \underbrace{\int_{F_C} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \cdot d\mathbf{f}}_{\triangleq 1)} + \underbrace{\oint_C \mathbf{B}' \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r})}_{\triangleq 2)} . \quad (4.4)$$