

Gauß'sche Gesetz:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Maxwell-Gleichung:

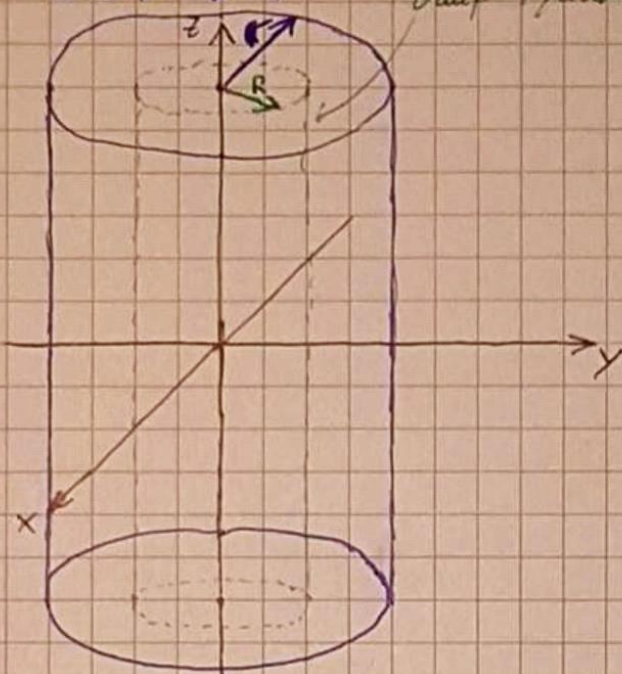
mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$

$$\Rightarrow \int_V \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) dV = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}) = k \cdot r$$

Gauß-Zylinder



mit Volumen eines Zylinders

$$V = \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^R 1 \cdot dV \quad \leftarrow s=r$$

oder $dV = r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^R 1 \cdot r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz \\ &= \int_0^z \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\phi \cdot dz = \int_0^z \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\phi \cdot dz \\ &= \int_0^z \frac{R^2}{2} \phi \Big|_0^{2\pi} dz = \int_0^z \frac{R^2 \pi}{1} dz \\ &= \pi R^2 z \Big|_0^z = \pi R^2 z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_V \frac{1}{\epsilon_0} k \cdot r dV &= \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ \frac{k}{\epsilon_0} \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz &= \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

Nebenbedingung: ohne Randeffekte:

mit $d\vec{A} = d\vec{A}_{\text{Haut}} + d\vec{A}_{\text{Deck}} + d\vec{A}_{\text{Boden}}$
unendlich langer Leiter, deswegen zu vernachlässigen.

Auswerten:

$$d\vec{A} = dA_H \vec{e}_r + dA_D \vec{e}_z + dA_B (-\vec{e}_z)$$

und $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \frac{k}{\epsilon_0} \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{3} r^3 d\phi \cdot dz = \int_{\partial V} (E \vec{e}_r) \cdot (dA_H \vec{e}_r + dA_D \vec{e}_z + dA_B (-\vec{e}_z))$$

$$\frac{2k}{3\epsilon_0} \int_0^z \pi r^3 dz = \int_{\partial V} E dA_H \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1} + \underbrace{E dA_D \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z}_{\text{Skalar von 1 Vektoren = 0}} + \underbrace{E dA_B (-\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z)}_{\text{Skalar von 1 Vektoren = 0}}$$

$$\frac{2k}{3\epsilon_0} r^3 \pi z = E \int_{\partial V=A} dA_H \Rightarrow \frac{2k}{3\epsilon_0} r^3 \pi z = E \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot dr \cdot dz$$

$$\Rightarrow \frac{2k}{3\epsilon_0} r^3 \pi z = E \int_0^z 2\pi r^2 dz \Rightarrow \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon_0} r^3 = E \Rightarrow E = \frac{k}{3\epsilon_0} r^2$$