

Leistungsberechnung Windräder (Quelle: Betz)

Potentielle Energie

Arbeit = Kraft x Weg

$$W = F \cdot s$$

Leistung = Arbeit/Zeit

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \frac{s}{t} = F \cdot v$$

Kraft = Fläche x Druckdifferenz

$$F = A \cdot \Delta p$$

$$P = A \cdot \Delta p \cdot v \quad (1)$$

Kinetische Energie

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \Delta v^2$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \dot{m} \cdot \Delta v^2$$

$$\dot{m} = \dot{V} \cdot \varrho = A \cdot v \cdot \varrho$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \varrho \cdot v \cdot \Delta v^2 \quad (2)$$

$$A \cdot v \cdot \Delta p = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \varrho \cdot v \cdot \Delta v^2 \quad (1) = (2)$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot \Delta v^2 \quad (3)$$

Impuls

$$F = A \cdot \Delta p = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t} \cdot \Delta v = \dot{m} \cdot \Delta v$$

$$\dot{m} = \dot{V} \cdot \varrho = A \cdot v \cdot \varrho$$

$$A \cdot \Delta p = A \cdot v \cdot \varrho \cdot \Delta v$$

$$\Delta p = \varrho \cdot v \cdot \Delta v \quad (4)$$

Druckdifferenz durch kinetische Energie = Druckdifferenz durch Impuls

$$\varrho \cdot v \cdot \Delta v = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot \Delta v^2 \quad (3) = (4)$$

$$v = \frac{\Delta v^2}{2 \cdot \Delta v} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot v_1 - v_2} = \frac{v_1 + v_2 \cdot v_1 - v_2}{2 \cdot v_1 - v_2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$P = A \cdot \varrho \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \quad \text{aus (2)}$$

$$x = \frac{v_2}{v_1}$$

$$P = A \cdot \varrho \cdot v_1^3 \cdot \frac{1+x}{2} \cdot 1 - x^2$$

$$c_p = \frac{1+x}{2} \cdot 1 - x^2 \quad \frac{dc_p}{dx} = 0 \quad c_p = \max \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1+x}{2} = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1+\frac{v_2}{v_1}}{2} = \frac{2}{3}$$

67% der anströmenden Leistung werden genutzt.

$$v_2 = \frac{1}{3} \cdot v_1$$

$$1 - x^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Davon stehen 89 % zur Gewinnung von Windradleistung zur Verfügung

$$P = A \cdot \varrho \cdot v_1^3 \cdot c_p$$

$$c_{p-\max} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27} \approx 0,6$$

Insgesamt stehen ca, 60 % der Windleistung am Rotor zur Verfügung

$$P_{theor.} = A \cdot \rho \cdot v_1^3 \cdot c_p$$

Kontinuitätsgesetz

Einströmendes Volumen = Ausströmendes Volumen

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = 3$$

$$A_2 = 3 \cdot A_1$$