

Aufgabe 23: Energie eines harmonischen Oszillators mit Dämpfung

Für den gedämpften harmonischen Oszillator aus Aufgabe 20 wird angenommen, dass per Reibung Energie aus dem Oszillator an die Umwelt abgegeben wird. Berechnen Sie die Zeit, nach der der Oszillator ein Drittel seiner Energie verloren hat. Wie groß ist die dann im Oszillator gespeicherte Energie?

Die zeitabhängige Amplitude des gedämpften Oszillators folgt einem Exponentialgesetz:

$$x_0(t) = x_0(t=0) \cdot \exp\left(-\frac{\eta t}{2}\right).$$

Damit folgt die momentane Gesamtenergie des schwingenden Systems zu

$$E_{ges} = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2(t) = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2(t=0) \cdot \exp(-\eta t).$$

Es ist die Zeit gefragt, nach der noch 2/3 der Gesamtenergie im Oszillator gespeichert sind:

$$\frac{2}{3} = \exp(-\eta t) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right) = -\eta t \Leftrightarrow -\frac{1}{\eta} \ln\left(\frac{2}{3}\right) = t$$

Die Dämpfungskonstante wurde in Aufgabe 20 zu $\eta = 0.277 \text{ s}^{-1}$ berechnet. Damit folgt

$$t = -\frac{1}{\eta} \ln\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{0.277 \text{ s}^{-1}} \cdot (-0.41) = 1.48 \text{ s}$$

Es ist dann noch eine Energie von $E_{ges} = 0.065 \text{ Nm}$ gespeichert.