Beweis der Impulserhaltung eines freien Teilchens

Ein freies Teilchen, welches sich mit dem Impuls $\vec{p}$ innerhalb eines potenzialfreien Raumes bewegt, ändert seinen Impuls nicht, solange keine äußere Kraft auf dieses einwirkt.

$$\begin{aligned} L &= E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - mgx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \\ S &= \int L\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\int \dot{x}^2\,\mathrm{d}t - mgxt \\ &= \frac{1}{2}m\left(x\dot{x} - \int x\ddot{x}\,\mathrm{d}t\right) - mgxt \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}})}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial(E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}})}{\partial x} &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x} - 0) = -mg \Leftrightarrow m\ddot{x} = -mg \\ &\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -mg \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} m\int \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = -mg\int \mathrm{d}t &\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -mgt \\ m\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -mg\int t\,\mathrm{d}t &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Die Gleichung (2) bestätigt den Impulserhaltungssatz, da die Masse multipliziert mit der zweiten Ableitung der Strecke, also der Beschleunigung 0 ergibt. Weiterhin bestätigt (3) die Galileischen Beobachtungen.