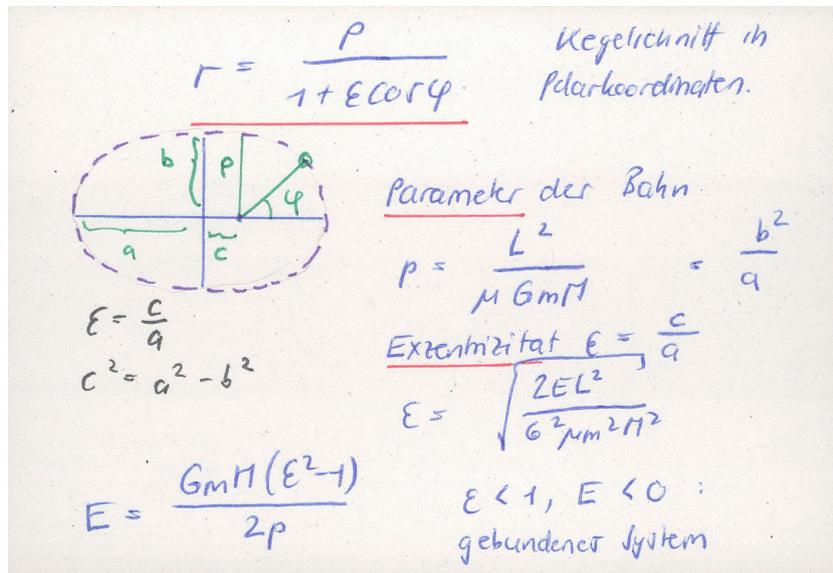


Parameter, Drehimpuls und Energie von Kepler-Bahnen



1. Beh.: $c^2 = a^2 - b^2$

Betrachte Dreiecke, die durch einen Faden der Länge $2a$ gebildet werden, der an den beiden Brennpunkten festgehalten wird (alle erreichbaren Punkte ergeben die Ellipse). Es ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten b, c (vom Ursprung aus) und Hypotenuse a .

2. Beh.: $p = \frac{b^2}{a}$

Betrachte wiederum rechtwinkliges Dreieck, nun mit den Katheten $2c, p$ und der Hypotenuse $2a - p$.

$$(2a - p)^2 = 4c^2 + p^2 \quad (1)$$

$$4a^2 - 4ap = 4c^2 = 4a^2 - 4b^2 \quad (\text{Beh.1}) \quad (2)$$

$$ap = b^2 \quad (3)$$

$$p = \frac{a^2}{b} \quad (4)$$

3. Geschwindigkeiten am Perihel und Aphel

Betrachte die Punkte Perihel und Aphel. Energieerhaltung:

$$\frac{m}{2}v_P^2 - G\frac{Mm}{r_P} = \frac{m}{2}v_A^2 - G\frac{Mm}{r_A} \quad (5)$$

$$v_P^2 - v_A^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) \quad (6)$$

Mit $r_P = a(1 - \varepsilon)$, $r_A = a(1 + \varepsilon)$:

$$\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1 - \varepsilon} - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \quad (7)$$

$$= \frac{2\varepsilon}{a(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)} = \frac{2\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} \quad (8)$$

Drehimpulserhaltung Aphel, Perihel:

$$mr_P v_P = mr_A v_A \quad (9)$$

$$v_A = \frac{r_P}{r_A} v_P = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} v_P \quad (10)$$

Eingesetzt in die Energieerhaltung:

$$v_P^2 \left[1 - \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)^2\right] = 2GM\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) = 4GM\frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)} \quad (11)$$

$$v_P^2 \cdot [(1 + \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon)^2] = 4GM\frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)}{a(1 - \varepsilon)} \quad (12)$$

$$v_P = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}, \quad v_A = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \quad (13)$$

4. Drehimpuls L

$$L^2 = mr_P v_P mr_A v_A = m^2 a^2 (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon) \frac{GM}{a} \quad (14)$$

$$L = m\sqrt{GMa(1 - \varepsilon^2)} \quad (15)$$

5. (Halb-)Parameter der Bahn p

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2) = \frac{L^2}{GMm^2} \quad (16)$$

6. Energie E

$$E = \frac{m}{2} v_P^2 - \frac{GMm}{r_P} \quad (17)$$

$$= \frac{m}{2} \frac{GM}{a} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \frac{GMm}{a(1 - \varepsilon)} \quad (18)$$

$$= -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm(\varepsilon^2 - 1)}{2p} \quad (19)$$