Wir betrachten i, ii und iii getrennt von einander

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad \text{(allg.)}$$

$$\phi_{ges} = \phi_{q_1} + \phi_{q_2} \quad \text{(Ansatz für i, ii, iii)}$$

Nachfolgend ist $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

i) Bereich mit $x > a$

$$\phi_{q_1}(x) = k \cdot \frac{q_1}{x} \qquad \phi_{q_2} = k \cdot \frac{q_2}{(x-a)}$$

$$\phi_{ges}(x) = k \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x-a} \right)$$

$$\phi_{ges}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x-a} \right)$$

ii) Bereich mit $0 < x < a$

$$\phi_{q_1}(x) = k \cdot \frac{q_1}{x} \qquad \phi_{q_2} = k \cdot \frac{q_2}{(a-x)}$$

$$\phi_{ges}(x) = k \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(a-x)} \right)$$

$$\phi_{ges}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(a-x)} \right)$$

iii) Bereich $x < a$

$$\phi_{q_1}(x) = k \cdot \frac{q_1}{x} \qquad \phi_{q_2} = k \cdot \frac{q_2}{(x-a)}$$

$$\phi_{ges}(x) = k \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(x-a)} \right)$$

$$\phi_{ges}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(x-a)} \right)$$

Zusammenführen von i, ii und iii liefert:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x-a} \right) & x > a \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(a-x)} \right) & 0 < x < a \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(x-a)} \right) & x < a \end{cases}$$

b) Es gilt $\vec{E}(x) = \text{grad}\, \phi(x) = \vec{\nabla} \cdot \phi(x)$

Es sind i, ii und iii immernoch die Abgrenzungen aus a) und $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

i) $\vec{\nabla} \cdot \phi(x) = k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x-a} \right) = k \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(x-a)^2} \right) \cdot \vec{e}_x$

ii) $\vec{\nabla} \cdot \phi(x) = k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(a-x)} \right) = k \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(a-x)^2} \right) \cdot \vec{e}_x$

iii) $\vec{\nabla} \cdot \phi(x) = k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(x-a)} \right) = k \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(x-a)^2} \right) \cdot \vec{e}_x$

Es ergibt sich folgendes:

$$\vec{E}_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(x-a)^2} \right) \cdot \vec{e}_x & x > a \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(a-x)^2} \right) \cdot \vec{e}_x & 0 < x < a \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(x-a)^2} \right) \cdot \vec{e}_x & x < a \end{cases}$$

c) $\phi_y = \phi_{q_1,y} + \phi_{q_2,y}$

$|\vec{q_1 p}| = \sqrt{y^2}$ $\quad |\vec{q_2 p}| = \sqrt{(-a)^2 + y^2}$ $\quad y \in \mathbb{R} / \{0\}$ $\quad p(0,y)$

$\phi_{q_1,y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{\sqrt{y^2}}$ $\quad \phi_{q_2,y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{\sqrt{(-a)^2 + y^2}}$

$\phi_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{\sqrt{y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(-a)^2 + y^2}} \right) \quad , y \neq 0$

d) $\vec{E}_y(y) = \text{grad}\, \phi_y = \vec{\nabla} \cdot \phi_y$

$\vec{\nabla} \cdot \phi_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{q_1}{\sqrt{y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(-a)^2 + y^2}} \right)$

$\vec{E}_y(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{q_1 \cdot y}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{q_2 \cdot y}{(y^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \vec{e}_y$

e)

1. Teilen von $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{e_r}$ durch jeweils q_1 und q_2 und
2. Vektoraddition führt zu $\vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{|\vec{r_1}|^2} + \frac{q_2}{|\vec{r_2}|^2} \right) \cdot \vec{e_r}$$

	Fall	Bereits Berechnet	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{\lvert\vec{r_1}\rvert^2} + \frac{q_2}{\lvert\vec{r_2}\rvert^2} \right) \cdot \vec{e_r}$
x-Achse	$x > a$	$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(x-a)^2} \right) \cdot \vec{e_x}$	$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(x-a)^2} \right) \cdot \vec{e_x}$
x-Achse	$0 < x < a$	$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(a-x)^2} \right) \cdot \vec{e_x}$	$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(a-x)^2} \right) \cdot \vec{e_x}$
x-Achse	$x < a$	$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(x-a)^2} \right) \cdot \vec{e_x}$	$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(x-a)^2} \right) \cdot \vec{e_x}$

<u>Beobachtungen</u>:

- Die Form des Ergebnisses von $\text{grad}\,\phi = \vec{E}$ und der Ermittlung von $\vec{E}$ über Coulomb ist gleich.
- Für $|\vec{r_1}|^2$ und $|\vec{r_2}|^2$ ergeben sich genau die Ergebnisse wie die Solchen die durch die Bildung von $\text{grad}\,\phi$ entstanden sind.
- Das Vorzeichen der Summanden in den Klammern bei $E(\vec{r})$ über Coulomb ergibt sich aus der Richtung des Vektors $\vec{e_r}$.
- Im 1. Fall ($x > a$) ist bei dem bereits berechneten das Vorzeichen in der Klammer letztendlich positiv. (!)
- Analoges gilt für die Berechnungen auf der y-Achse.

$\Rightarrow$ Das elektrische Feld kann über Coulomb und die Bildung des Gradienten vom zugehörigen Skalarfeldes (Potenzials) ermittelt werden. Das Resultat ist natürlich das selbe.