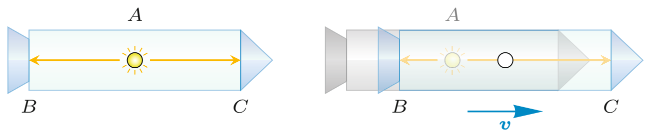

Abb. 9.7 Wird in der Mitte einer Rakete ein Licht eingeschaltet (Ereignis A), so werden die gegenüberliegenden Wände für einen Beobachter, der in demselben Inertialsystem ruht, gleichzeitig erhellt (Ereignisse B und C). Bewegt sich die Rakete gegenüber dem Beobachter, dann können B und C für diesen wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nicht mehr gleichzeitig sein, da das Licht für ihn unterschiedliche Strecken zurückzulegen hat. (Wegen der Lorentz-Kontraktion ist die bewegte Rakete auch noch kürzer für diesen Beobachter, was aber keinen Unterschied für die Asymmetrie macht, die die Gleichzeitigkeit von B und C aufhebt.)

absoluten Zeit aufgegeben werden, die in der Newton'schen Mechanik unabhängig vom Bezugssystem für jeden Beobachter gleich verrinnt und deshalb in den Galilei-Transformationen (2.40) bis auf eine mögliche Verschiebung des Zeitnullpunktes unverändert bleibt.

Das Relativitätsprinzip und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit sind aber mit einer absoluten Zeit unvereinbar, wie leicht einzusehen ist. Nehmen wir als ein Beispiel eine gleichförmig bewegte Rakete, in der exakt in der Mitte eine Lichtquelle eingeschaltet wird. Für alle Beobachter im Inertialsystem der Rakete wird die vordere und hintere Wand der Rakete gleichzeitig erhellt (Abb. 9.7). Wird dies aber aus dem Inertialsystem einer anderen Rakete, die sich mit großer Geschwindigkeit gegenüber der ersten bewegt, beobachtet, ergibt sich ein anderes Bild. Auch in diesem Inertialsystem breitet sich das Licht in alle Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit aus, aber die vordere und hintere Wand der ersten Rakete bewegt sich nun vom Punkt, wo das Licht seinen Ursprung hat, weg bzw. auf ihn zu. Das Licht muss daher in der einen Richtung eine längere und in der anderen eine kürzere Strecke durchlaufen, sodass für das bewegte Inertialsystem die vordere und die hintere Wand in der ersten Rakete nicht mehr gleichzeitig erhellt werden. Wenn sich die Rakete gegenüber dem zweiten Inertialsystem nach vorne bewegt, wird die hintere Wand zuerst erhellt, ansonsten ist die zeitliche Reihenfolge gerade vertauscht.

Es ist nicht verwunderlich, dass vor Einstein kein Physiker an der absoluten Zeit rütteln wollte, schon gar nicht an Begriffen wie „Gleichzeitigkeit" und „zeitliche Abfolgen", denn eine saubere Trennung von Vergangenheit und Zukunft ist unabdingbar für Kausalität und Berechenbarkeit. Es wird auch nur dann zu keinem Problem, wenn es keine Möglichkeit gibt, die Lichtgeschwindigkeit zu überschreiten (was in der Newton'schen Mechanik mit den Galilei-Transformationen aber möglich wäre).

Frage 1

Erweitern Sie das Gedankenexperiment mit den zueinander bewegten Raketen um ein mit Überlichtgeschwindigkeit von einer Wand zur anderen fliegendes Insekt, und überlegen Sie sich, dass es zugleich in einem Inertialsystem vorwärts in der Zeit und im anderen rückwärts in der Zeit reisend erscheinen könnte.

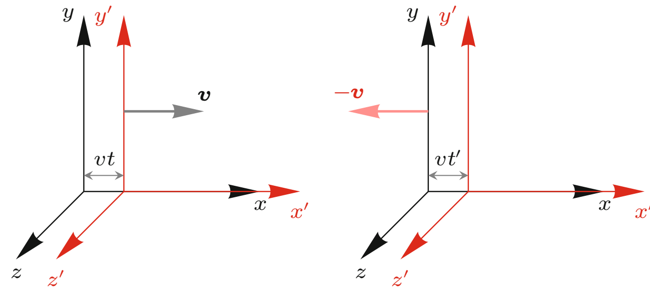

Abb. 9.8 Standardkoordinatenwahl für die Transformation zwischen zwei Inertialsystemen, die sich mit Geschwindigkeit v zueinander bewegen. Bei $t = t' = 0$ sollen sie ihren gemeinsamen Koordinatenursprung haben, die x- und x'-Achsen sollen parallel zu $\boldsymbol{v}$ sein, und es soll keine Drehung um letztere im Spiel sein

9.2 Lorentz-Transformationen

Wir wollen nun unter Aufgabe einer absoluten Zeit die Transformationsgleichungen zwischen zwei Inertialsystemen S und S' herleiten, die sich mit einer Geschwindigkeit $v < c$ zueinander bewegen, und zwar so, dass das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit respektiert wird. Als Standardkoordinatenwahl werden wir in beiden Systemen kartesische Koordinaten verwenden, die zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ einen gemeinsamen Koordinatenursprung haben und die so orientiert sind, dass sich das System S' entlang der positiven x-Achse von S bewegt. Es soll auch keine Drehung im Spiel sein, sodass die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ den Ebenen $y' = 0$ und $z' = 0$ entsprechen (Abb. 9.8).

Mit Galilei-Transformationen entspräche dies (2.40) mit $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{0}$ und $t_0 = 0$, nämlich $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$, und dies sollte im Grenzfall $c \to \infty$ auch bei den relativistischen Transformationsgleichungen wieder herauskommen. (Für Galilei-Transformationen hatte man übrigens vor Einstein keinen eigenen Namen. Diese erschienen einfach zu selbstverständlich. Erst 1909 führte der österreichische Physiker und Philosoph *Philipp Frank*, 1884–1966, diese Bezeichnung ein.)

Für die Suche nach verallgemeinerten, relativistischen Transformationsgleichungen können wir uns auf lineare Transformationen beschränken, denn ansonsten würden gerade gleichförmig durchlaufene (und damit kräftefreie) Teilchenbahnen in S nicht auf solche in S' abgebildet werden. Mit den Forderungen

$$\begin{aligned} x' = 0 &\iff x = vt, \\ x = 0 &\iff x' = -vt', \\ y' = 0 &\iff y = 0, \\ z' = 0 &\iff z = 0, \end{aligned} \tag{9.14}$$

die jeweils für alle nicht beteiligten Koordinaten zu erfüllen sind, ist diese lineare Transformation weiter eingeschränkt auf

$$x' = A(x - vt), \quad y' = Cy, \quad z' = \tilde{C}z. \tag{9.15}$$

Da die zweite Forderung in (9.14) für alle y und z zu gelten hat, bleibt als möglicher linearer Ansatz für die Transformation der Zeit

$$t' = Bt - Dx. \tag{9.16}$$

Da $x = 0$ nun $x' = -vt'$ verlangt und für $x = 0$ einerseits $x' = -Avt$ und weiter $t' = Bt$ ist, können wir $B = A$ setzen.

Die Koeffizienten C und $\tilde{C}$ können aufgrund der Isotropie des Raumes nur vom Betrag von v abhängen, treten also unverändert bei der inversen Transformation auf, sodass auch $y = Cy'$, $z = \tilde{C}z'$ und damit $C^2 = \tilde{C}^2 = 1$ sein muss. Wenn wir $C = -1$ und $\tilde{C} = -1$ ausschließen, was einer bloßen Spiegelung von y bzw. z entsprechen würde, können wir schon einmal

$$y' = y, \quad z' = z \tag{9.17}$$

setzen.

Aufgrund der postulierten Konstanz der Lichtgeschwindigkeit müssen die restlichen Koeffizienten nun so beschaffen sein, dass eine (notwendigerweise isotrope) Lichtausbreitung in S einer solchen in S' entspricht. Betrachten wir dazu eine Kugelwelle, die im Koordinatenursprung bei $t = t' = 0$ emittiert wird. In S ist diese durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{9.18}$$

gegeben und in S' durch

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2t'^2 \\ &= A^2(x^2 - 2xvt + v^2t^2) + y^2 + z^2 \\ &= c^2(A^2t^2 - 2ADtx + D^2x^2). \end{aligned} \tag{9.19}$$

Übereinstimmung mit (9.18) wird erreicht durch

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad D = \frac{v}{c^2}A, \tag{9.20}$$

wobei wir die positive Wurzel wählen, damit für $v = 0$ die Transformation zur Identität wird (und nicht zu einer noch möglichen Spiegelung von x und t).

Frage 2

Rechnen Sie dies nach!

Im Grenzfall $c \to \infty$ ist offensichtlich $A = B = 1$ und $D = 0$, und alles reduziert sich auf die einfachen Galilei-Transformationen. Nur in diesem Fall hat die Zeit bis auf Verschiebungen des Zeitnullpunktes eine absolute Bedeutung. Wie wir schon aus dem Relativitätsprinzip gefolgert haben, muss eine endliche invariante Geschwindigkeit c zu einer nichttrivialen Transformation der Zeitkoordinate führen.

Bevor wir weitere Konsequenzen diskutieren, werden wir zunächst unseren Formalismus zur Umrechnung zwischen Inertialsystemen den neuen Gegebenheiten anpassen und die Transformationsgleichungen in Matrixnotation zusammenfassen.

Lorentz-Transformation in x-Richtung

In Matrixform geschrieben lautet die Lorentz-Transformation von einem Inertialsystem S auf ein Inertialsystem S', das sich gegenüber S mit Geschwindigkeit $v = \beta c$ in positiver x-Richtung bewegt:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}(v)} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{9.21}$$

mit den gebräuchlichen Abkürzungen

$$\beta := \frac{v}{c}, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{9.22}$$

Die inverse Transformation zu dieser „Standard-Lorentz-Transformation“ ist durch $v \to -v$ bzw. $\beta \to -\beta$ gegeben, $\mathbf{\Lambda}^{-1}(v) = \mathbf{\Lambda}(-v)$, also

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{9.23}$$

Frage 3

Verifizieren Sie durch Ausmultiplizieren dieser Matrizen, dass sie tatsächlich zueinander invers sind! Zeigen Sie außerdem:

$$\det \mathbf{\Lambda}(v) = 1. \tag{9.24}$$

In obiger symmetrischer Form publizierte Poincaré diese Transformation 1905 wenige Wochen, bevor Einstein seine Arbeit zur speziellen Relativitätstheorie einreichte, und nannte sie Lorentz-Transformation (Poincaré 1905). Diese Transformation wurde von Lorentz 1892 in einer Form aufgestellt, die bei der Transformation der Zeitvariablen Fehler der Ordnung v^2/c^2 zuließ. Erstmals komplett formulierte sie Larmor 1897. Eine Version, die sich nur durch eine Skalentransformation davon unterscheidet, wurde übrigens bereits 1887 vom Göttinger Physiker *Woldemar Voigt* (1850–1919) bei der Analyse der Wellengleichung gefunden (Voigt 1887), war ihrer Zeit aber zu weit voraus, um voll verstanden zu werden, und blieb unbeachtet. (*Skalentransformation* bedeutet hier, dass alle Längen- und Zeiteinheiten um einen gemeinsamen Faktor verändert werden. Die Physik ist im Allgemeinen nicht invariant unter Skalentransformationen, die Wellengleichung dagegen schon.)

Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Poincaré zeigte auch bereits 1905, dass die Lorentz-Transformationen für beliebig orientierte Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ mit