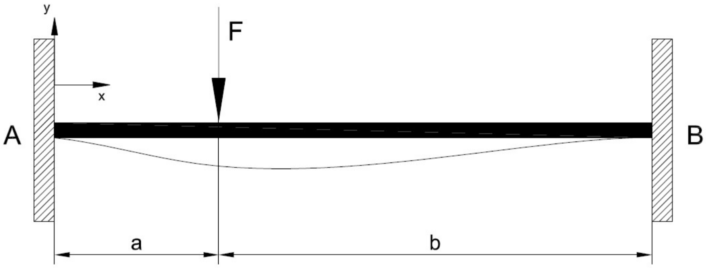
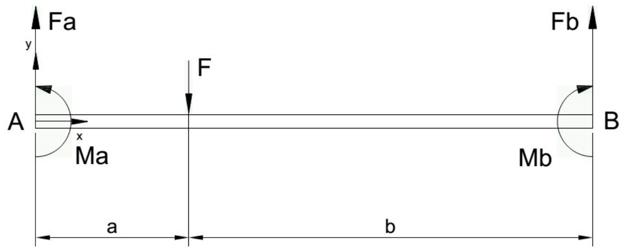
Ein Träger wird an seinen beiden Enden fest eingespannt und mit einer Kraft außermittig belastet. (siehe Skizze)
Gesucht sind die Gleichungen der Durchbiegung sowie die statischen Schnittgrößen.
An welcher Stelle des Trägers ist die maximale Durchbiegung ?



Freigemachtes System



Lösung:
Der Träger ist statisch unbestimmt gelagert und wir müssen die Verformungen mit berücksichtigen.

$E \cdot I \cdot y''(x) = -M_b(x)$ Aus der Balkentheorie

Da es hier sich um ein Träger mit 2 Feldern handelt, wird bereichsweise Integriert.

Links von "F" gilt: Rechts von "F" gilt:

$M_{bl}(x) = M_a - F_a \cdot x$ $M_{br}(x) = M_a - F_a \cdot x + F \cdot (x-a)$

$$y_l(x) = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(C_2 - \frac{x^3 \cdot F_a}{6} + \frac{x^2 \cdot M_a}{2} - \frac{x \cdot \left(M_a^{\ 2} - 2\ C_1 \cdot F_a\right)}{2\ F_a} \right)$$ Integriert

$$y_r(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\left(\frac{a \cdot F}{2} - \frac{M_a}{2} \right) \cdot x^2 - C_4 - \frac{x^3 \cdot (F - F_a)}{6} - \frac{x \cdot \left(F \cdot a \cdot (F \cdot a - 2\ M_a) + (2\ F - 2 \cdot F_a) \cdot C_3 + M_a^{\ 2}\right)}{2\ (F - F_a)} \right)$$

Weiterhin gelten die geometrischen Beziehungen:

$y_l(0) = 0$ $y_l'(0) = 0$ $y_r(a+b) = 0$ $y_r'(a+b) = 0$

Daraus werden die Integrationskonstanten ermittelt:

$$C_1 = \frac{M_a^{\ 2}}{2\ F_a} \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = -\frac{\left(a \cdot F_a - b \cdot F - M_a + b \cdot F_a\right)^2}{2\ (F - F_a)}$$

$$C_4 = -\frac{1}{6}\ (a+b)^2 \cdot \left(a \cdot F - 3\ M_a - 2\ b \cdot F + 2\ a \cdot F_a + 2\ b \cdot F_a\right)$$

Einsetzen der Konstanten in die Ausgangsgleichungen ergibt dann folgendes:

$$y_l(x) = \frac{x^2 \cdot (x \cdot F_a - 3\ M_a)}{6\ E \cdot I}$$

$$y_r(x) = \frac{(a+b-x)^2 \cdot (a \cdot F - 3\ M_a - 2\ b \cdot F - x \cdot F + 2\ a \cdot F_a + 2\ b \cdot F_a + x \cdot F_a)}{6\ E \cdot I}$$

Es fehlen jetzt aber noch zwei unbekannte Größen, die aus den Übergangsbedingungen an der Schnittstelle "a" bestimmt werden (Kompatibilitätsbedingungen):

$y_l(a) = y_r(a)$ Durchbiegung an der Stelle "a"

$y_l'(a) = y_r'(a)$ Steigung an der Stelle "a"

Auswertung der beiden Gleichungen mit den zwei Unbekannten führt auf:

$$F_a = F \cdot \frac{b^2 \cdot (3\ a + b)}{(a+b)^3} \qquad M_a = F \cdot \frac{a \cdot b^2}{(a+b)^2}$$

Die beiden Lösungen in die Funktionsgleichungen eingesetzt, ergeben die vollständigen Gleichungen der Biegelinie:

$$y_l(x) = -\frac{b^2 \cdot x^2 \cdot F \cdot (3\ a \cdot (a+b) - x \cdot (3\ a + b))}{6\ E \cdot I \cdot (a+b)^3} \qquad 0 \le x \le a$$

$$M_{bl}(x) = F\ \frac{b^2}{(a+b)^3}\ (a \cdot (a+b) - x \cdot (3\ a + b)) \qquad F_{bl}(x) = -F\ \frac{b^2\ (3\ a + b)}{(a+b)^3}$$

$$y_r(x) = \frac{a^2 \cdot F \cdot (a \cdot (a+b) - x \cdot (3\ b + a)) \cdot (a+b-x)^2}{6\ E \cdot I \cdot (a+b)^3} \qquad a < x \le a+b$$

$$M_{br}(x) = -F\ \frac{a^2}{(a+b)^3}\ (a^2 + 3\ a \cdot b - x \cdot a + 2\ b^2 - 3\ x \cdot b) \qquad F_{br}(x) = F\ \frac{a^2\ (3\ b + a)}{(a+b)^3}$$

Ein Zahlenbeispiel mit einem Rechteckrohr 80x60x5 aus ST37–2:

$E := 2.1 \cdot 10^5 \ \frac{N}{mm^2}$ $\quad I := 103\ cm^4$ $\quad a := 260\ mm$ $\quad l := 800\ mm$ $\quad F := 16\ kN$

$b := l - a = 540\ mm$ $\quad x := 0, 1\ mm .. a + b$ $\quad W_b := 25.8\ cm^3$

$Nm := 1\ N \cdot m$ $\quad kNm := 1\ kN \cdot m$

Bestimmung und Darstellung der statischen Schnittgrößen:

$F_a := F \frac{b^2 \ (3\ a + b)}{(a+b)^3}$ $\quad F_b := F \cdot \left(1 - \frac{b^2\ (3\ a + b)}{(a+b)^3}\right)$ $\quad F_a = 12.03\ kN$ $\quad F_b = 3.97\ kN$

$M_a := F \cdot a \frac{b^2}{(a+b)^2}$ $\quad M_b := F \cdot b \frac{a^2}{(a+b)^2}$ $\quad M_a = 1895.4\ Nm$ $\quad M_b = 912.6\ Nm$

$$y_l(x) := -\frac{b^2 \cdot x^2 \cdot F \cdot (3\ a \cdot (a+b) - x \cdot (3\ a + b))}{6\ E \cdot I \cdot (a+b)^3}$$

$$y_r(x) := \frac{a^2 \cdot F \cdot (a \cdot (a+b) - x \cdot (3\ b + a)) \cdot (a + b - x)^2}{6\ E \cdot I \cdot (a+b)^3}$$

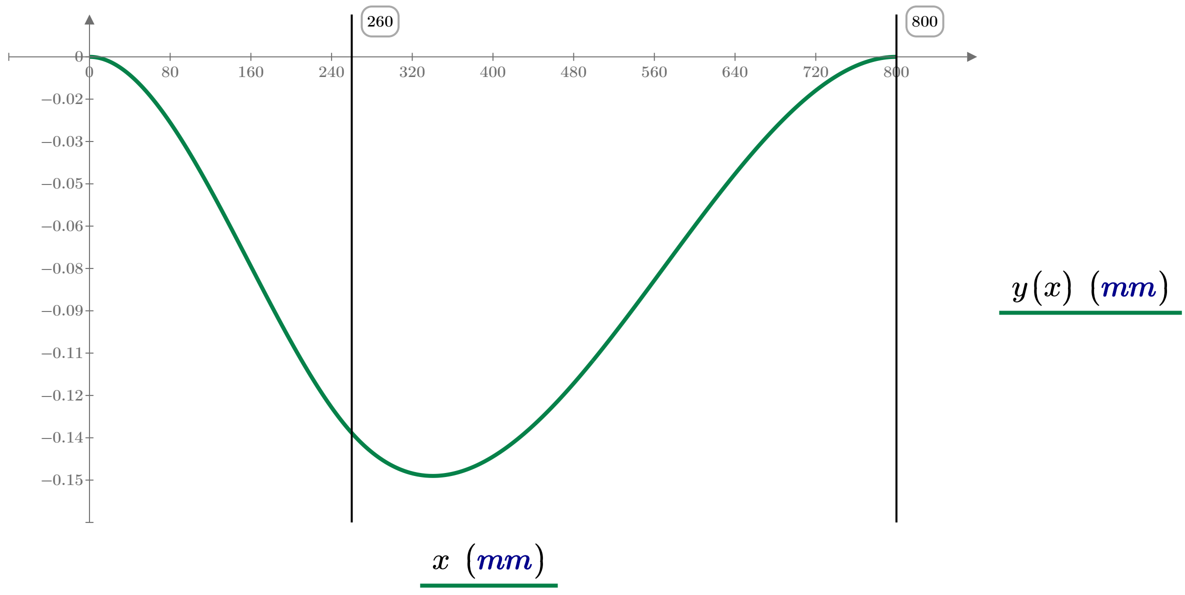
$$M_{bl}(x) := F \frac{b^2}{(a+b)^3} \left(a^2 + a \cdot b - 3\ a \cdot x - b \cdot x\right) \qquad F_{bl}(x) := -F \frac{b^2\ (3\ a + b)}{(a+b)^3}$$

$$M_{br}(x) := -F \frac{a^2}{(a+b)^3} \left(a^2 + 3\ a \cdot b - x \cdot a + 2\ b^2 - 3\ x \cdot b\right) \qquad F_{br}(x) := F \frac{a^2\ (3\ b + a)}{(a+b)^3}$$

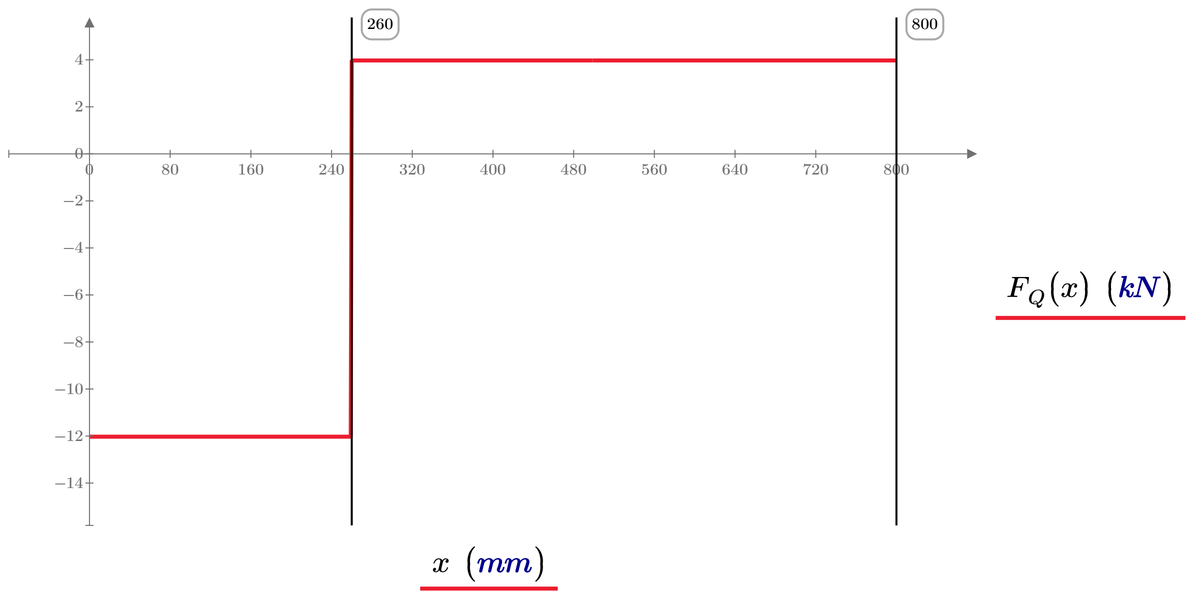
$$y(x) := \begin{cases} y_l(x) & \text{if } 0 \le x < a \\ y_r(x) & \text{if } a \le x \le a + b \end{cases} \qquad F_Q(x) := \begin{cases} F_{bl}(x) & \text{if } 0 \le x < a \\ F_{br}(x) & \text{if } a \le x \le a + b \end{cases} \qquad M_b(x) := \begin{cases} M_{bl}(x) & \text{if } 0 \le x < a \\ M_{br}(x) & \text{if } a \le x \le a + b \end{cases}$$

Biegespannungsverlauf:

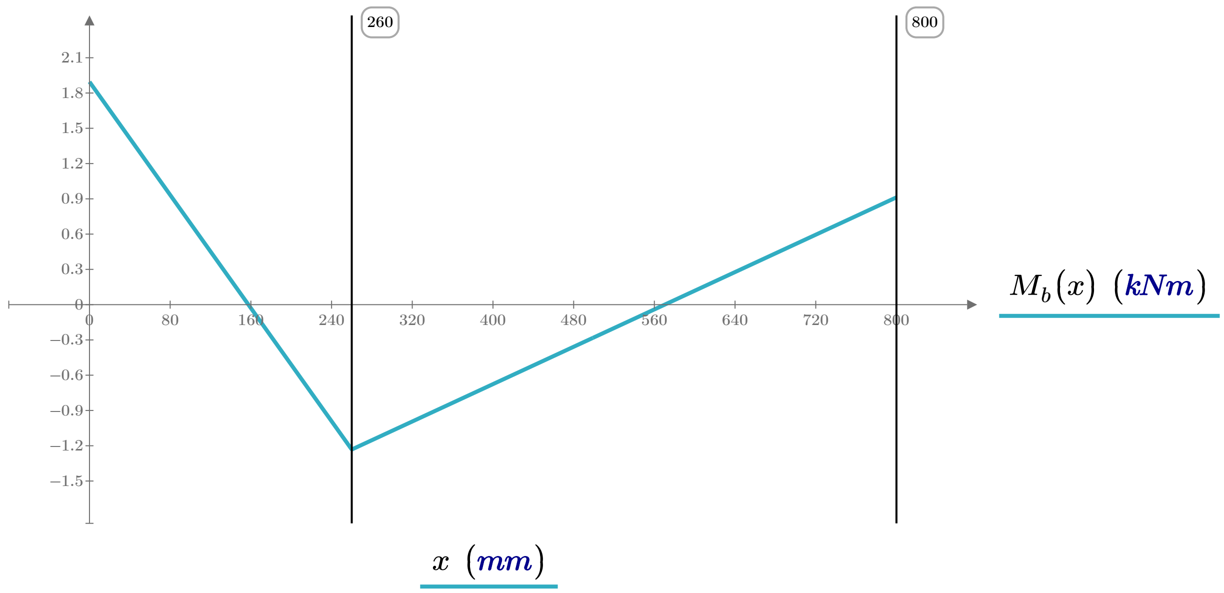
$$\sigma_b(x) := \frac{M_b(x)}{W_b}$$



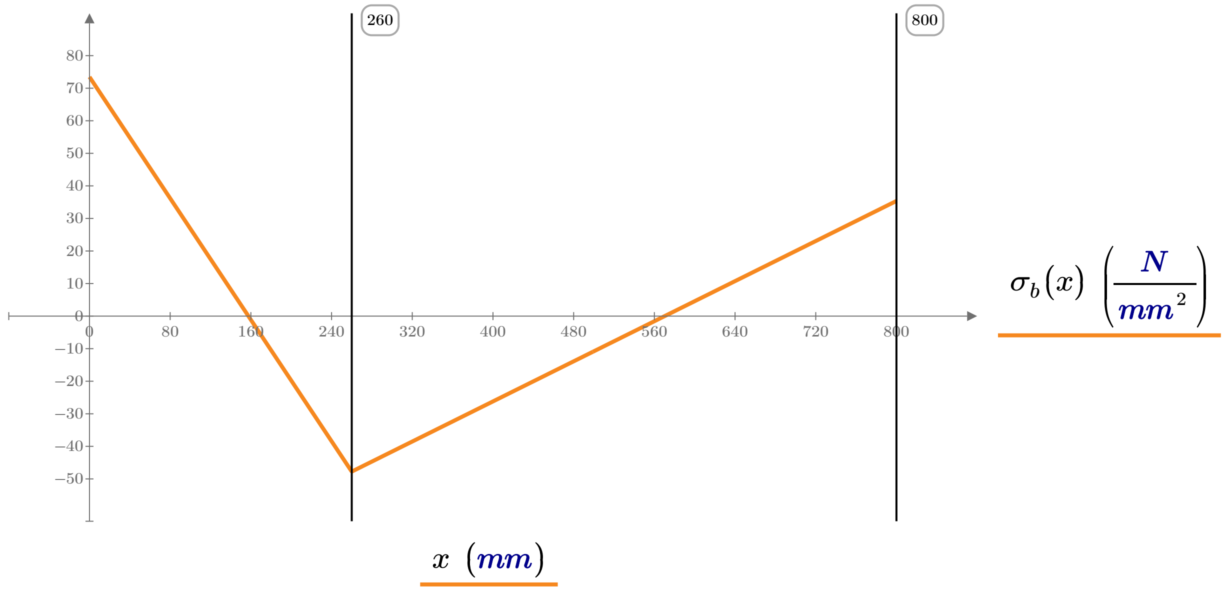
260
800
0
80
160
240
320
400
480
560
640
720
800
−0.02
−0.03
−0.05
−0.06
−0.08
−0.09
−0.11
−0.12
−0.14
−0.15
$y(x)\ (mm)$
$x\ (mm)$



260
800
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
0
80
160
240
320
400
480
560
640
720
800
$F_Q(x)\ (kN)$
$x\ (mm)$



260
800
2.1
1.8
1.5
1.2
0.9
0.6
0.3
0
−0.3
−0.6
−0.9
−1.2
−1.5
0
80
160
240
320
400
480
560
640
720
800
$M_b(x)\ (kNm)$
$x\ (mm)$



Die maximale Durchbiegung tritt in diesem Beispiel im linken Trägerabschnitt auf:

Es ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y_r(x) = 0$$

Mit dessen Lösungen:

$$x = \begin{bmatrix} a+b \\ \dfrac{(a+b)^2}{a+3 \cdot b} \end{bmatrix}$$

$$x_1 := a+b \qquad x_2 := \frac{(a+b)^2}{a+3 \cdot b}$$

Betragsmäßig ist bei der zweiten Lösung ein Maximum aufzufinden wegen:

$$y_r''(x_1) = -\frac{a^2 \cdot F \cdot b}{(a+b)^2 \cdot E \cdot I}$$

Mathematisches Maximum, da y<0

$$y_r''(x_2) = \frac{a^2 \cdot b \cdot F}{E \cdot I \cdot (a+b)^2}$$

Mathematisches Minimum, da y>0

$$y_r(x_1) = 0\ mm$$

$y_r(x_2) = -0.15\ mm$ bei $x_2 = 340.43\ mm$

$$x_{ymax} := \frac{(a+b)^2}{a+3\ b} \qquad y_{max} := -\frac{2\ a^2 \cdot F \cdot b^3}{3\ E \cdot I \cdot (a+3\ b)^2} \qquad x_{ymax} = 340.43\ mm \qquad y_{max} = -0.15\ mm$$

Maximale Biegespannung (vgl. Diagramm):

$$\sigma_{b\_max} := \sigma_b(0\ mm) = 73.47\ \frac{N}{mm^2} \qquad M_{bmax} := M_b(0\ mm) = 1895.4\ Nm$$

Zum Vergleich:
Ein Träger gleicher Geometrie mit gleichen Lasten wird an den Lagerstellen nicht fest eingespannt .
(Die Momente verschwinden in den Lagerstellen)

$F_a = 12.03\ kN$ $\qquad F_b = 3971.5\ N$

$y_{max} = 0.6\ mm$ $\qquad x_{ymax} = 340.8\ mm$

$\sigma_{bmax} = 99.33\ \frac{N}{mm^2}$