Übungsblatt 3 - Lösungen

zur Vorlesung EP2 (Prof. Grüner) im SS 2010
3. Juni 2011

Aufgabe 1: Plattenkondensator

Ein Kondensator besteht aus parallelen Platten mit einer quadratischen Grundfläche von $20cm$ Kantenlänge. Es liegt eine Spannung von $1000V$ an und der Plattenabstand beträgt $x = 5mm$. Berechnen Sie:

a) seine Kapazität

Lösung:

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = 70,8 \cdot 10^{-12}\mathrm{F} = 70,8\mathrm{pF}$$

$$\epsilon_0 = 8{,}854\,187\,817\,62\ldots \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}},\ 1\,\mathrm{F} = 1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = 1\,\frac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{V}} = 1\,\frac{\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}$$

b) seine Ladung

Lösung:

$$Q = C \cdot V = 70,8\mathrm{pF} \cdot 1000\mathrm{V} = 7,08 \cdot 10^{-8}\mathrm{C}$$

c) die gespeicherte Energie

Lösung:

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = 3,54 \cdot 10^{-5}\mathrm{J}$$

d) die anziehende Kraft zwischen den Platten.

Lösung:

Kraft bewirkt Energieänderung:

$$F = \frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{\epsilon_0\mathrm{A}}{x}V^2\right) = -\frac{1}{2x}\frac{\epsilon_0 A}{x}V^2 = -\frac{CV^2}{2x} = 7,08 \cdot 10^{-3}\mathrm{N}$$

Wobei der Plattenabstand d hier x ist, entsprechend der Strecke die die Platten auseinander gezogen wurden.

Alternativ kann die Kraft auch über das Feld und die berechnete Ladung im Kondensator berechnet werden, da das Feld im Kondensator homogen ist:

$$E = \frac{F}{q} \Rightarrow F = E \cdot q = \frac{U}{d} \cdot q$$

Allerdings muss hier für q die Ladung $Q/2$ eingesetzt werden.

$$F = \frac{Q}{2}\frac{U}{d} = 7.08 \cdot 10^{-3}\mathrm{N}$$

e) Es wird nun ein Dielektrikum mit $\epsilon_r = 2$ und einer Dicke von $2mm$ an der Innenseite einer Platte befestigt. Wie ändert sich die Kapazität?

Lösung:

1. *Über Potentialdifferenz:*

   In Luft: E-Feld $= E_0$; in Dielektrikum: E-Feld $= \frac{E_0}{\epsilon_r}$.

$$\rightarrow U = E_0 \cdot \frac{3}{5}d + \frac{E_0}{\epsilon_r} \cdot \frac{2}{5}d = E_0 d\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}U_0$$
$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{5}{4}\frac{Q}{U_0} = \frac{5}{4}C_0$$

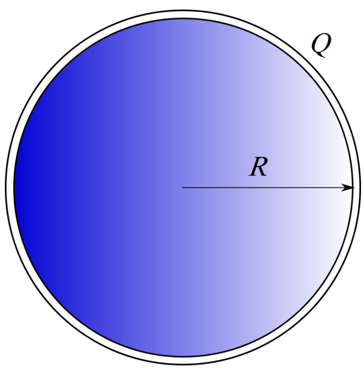
   Das E-Feld im Innern setzt sich nun aus zwei Bereichen zusammen, einem mit und einem ohne Dielektrikum.

2. *Über Reihenschaltung:*

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_0 A} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$$
$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d_1 \epsilon_r + d_2} = \frac{2\epsilon_0 A}{2 \cdot \frac{3}{5}d + \frac{2}{5}d} = \frac{5}{4}C_0$$

Aufgabe 2: Feld einer geladenen Kugelschale

Berechnet werden soll das elektrische Feld innerhalb und ausserhalb einer dünnen geladenen Kugelschale mit Radius R und Gesamtladung Q. Berechnen Sie das Feld mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes für beide Raumgebiete. Skizzieren Sie das Feld danach in einem Graphen in Abhängigkeit vom Abstand zum Mittelpunkt der Kugelschale.



Lösung:
Satz von Gauss:

$$\boxed{\Phi_{ges} = \oint_S E_n dA = \frac{Q_{innen}}{\epsilon_0}}$$

Der Fluss des el. Feldes durch eine geschlossene Oberfläche mit beliebiger Form ist gleich der eingeschlossenen Ladung Q_{innen} geteilt durch die Dielektrizitätskonstante des Vakuum ϵ_0.
Unterteilung der Integration in zwei Teile mit verschiedenen Ladungen Q_{innen} innerhalb der Gaussfläche S

Im Inneren der Kugelschale ($r_S < R$):
Ladung $Q_{innen} = Q(r_s < R) = 0$

$$\Rightarrow \oint_S E_n dA = 0$$

mit $E_n = E_r$ *wg. Kugelsymmetrie* und $E_r = const.$ *auf Oberfläche der Gausskugel gilt:*

$$\Rightarrow E_r \oint_S dA = E_r \cdot 4\pi r_s^2 = 0$$

$$\Rightarrow E_r = 0$$

Das el. Feld einer geladenen Kugelschale ist also nur vom Radius (Abstand zum Zentrum) abhängig (wg. Kugelsymmetrie) und ist im innern der Kugelschale null (keine Ladung innerhalb Gaussfläche).

Ausserhalb der Kugelschale ($r_S > R$):

Ladung $Q_{innen} = Q(r_s > R) = Q$

Jetzt ist die gesamte Ladung Q innerhalb der Gaussfläche eingeschlossen

$$\oint E_n dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

wg. Kugelsymmetrie und $E_r = const.$ *auf Oberfläche der Gausskugel gilt:*

$$\Rightarrow E_r \oint_S dA = E_r \cdot 4\pi r_s^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_s^2}$$

Da die Gaussoberfläche eine Kugel mit beliebigem Radius darstellt kann r_s frei gewählt werden also $r_S = r$ solange $R_S > R$ ist.

$$\Rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Das el. Feld einer geladenen Kugelschale ist ausserhalb der Kugelschale gleich dem einer Punktladung.

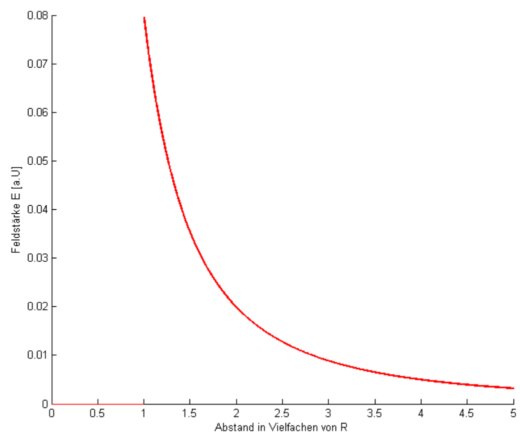


Abbildung 1: Elektrisches Feld

Aufgabe 3: Feld einer geladenen Kugel

Gegeben ist eine geladene Kugel mit Radius R. Ihre Ladungsdichte $\rho(r)$ wächst von $\rho = 0$ im Zentrum linear auf den Wert $\rho = \rho_0$ an der Kugeloberfläche an. Berechnen Sie das elektrische Feld innerhalb und außerhalb der Kugel. Benutzen Sie hierfür den Satz von Gauss.

Lösung:
Satz von Gauss:

$$\boxed{\oint_S E_n dA = \frac{Q_{innen}}{\epsilon_0}}$$

1. Im Inneren der Kugel:

Eingeschlossene Ladung:
Die Ladungsdichte steigt linear mit r an und beträgt am Rand der Kugel, wenn $r = R$, den Wert ρ_0. Also:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{R} \cdot r$$

Damit lässt sich die innerhalb der Gaussfläche liegende Ladung Q_{innen} in Abhängigkeit des Radius r_S der Gaussfläche berechnen:

$$\Rightarrow Q_{innen} = \int_V \rho(r')dV = \int_V \rho(r')d^3r' = \frac{\rho_0}{R}\int_0^{r_S} r' \cdot 4\pi r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0}{R}\int_0^{r_S} r'^3 dr'$$
$$= \frac{\rho_0 \pi}{R} r_S^4$$

Gauss'sches Gesetz:

$$\oint E_n dA = \frac{\rho_0 \pi}{\epsilon_0 R} r_S^4$$
$$\Rightarrow E_n \cdot 4\pi r_S^2 = \frac{\rho_0 \pi}{\epsilon_0 R} r_S^4$$
$$\Rightarrow E_n = \frac{\rho_0 r_S^2}{4\epsilon_0 R}$$
$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R}$$

Das Feld kann wg. der Kugelsymmetrischen Ladungsverteilung weder von ϕ noch von θ abhängen. Deshalb zeigt die einzige Komponente in Richtung von $\hat{r}$ und $E_n = E_r$ (außerdem ist $E_n || E_r$ und zeigt deshalb in dieselbe Richtung).
2. Ausserhalb der Kugel:

Die gesamte Ladung der Kugel kann einfach aus dem bereits gelösten Integral gewonnen werden wenn nun für r_S der Radius der Kugel R eingesetzt wird.

$$Q_{innen}(r_S) = \frac{\rho_0 \pi}{R} r_S^4 \Rightarrow Q_{innen}(r_S = R) = \rho_0 \pi R^3$$

Gauss'sches Gesetz:

$$\Rightarrow E_n \cdot 4\pi r_S^2 = \frac{\rho_0 \pi R^3}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}$$

Wobei mit den bekannten Argumenten aus r_S ein r wurde und aus E_n ein E_r. Das Ergebnis entspricht wiederum dem Feld einer Punktladung mit der Ladung:

$$Q_{Punktldg} = \rho_0 \pi R^3$$

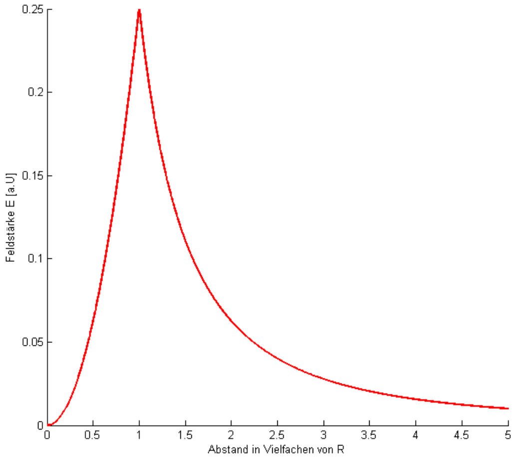


Abbildung 2: Elektrisches Feld