

8)

$$t_0 = 0$$

$$v_0 = \dot{z}(0)$$

$$m \cdot \ddot{z} = -m \cdot g - \mu \dot{z} |\dot{z}|$$

$$\text{DGL für } z: \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{\mu}{m} \cdot \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right|$$

DGL für v : (Reduzierung der Ordnung)

$$\dot{v} = -g - \frac{\mu}{m} v |v|$$

1. Fall: $v \geq 0$

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\mu}{m} \cdot v^2 \quad \text{für } \frac{dv}{dt} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow v_{\infty} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\mu}}$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dv}{-g - \frac{\mu}{m} v^2} = dt \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{1 + \frac{\mu}{m \cdot g} v^2} = dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{v_{\infty}}\right)^2} = -g \cdot dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{v_0}^v \frac{1}{1 + \left(\frac{v'}{v_{\infty}}\right)^2} dv' = -g \cdot \int_{t_0}^t dt'$$

$$u = \frac{v'}{v_{\infty}} \rightarrow \frac{du}{dv'} = \frac{1}{v_{\infty}} \quad \Leftrightarrow \quad dv' = v_{\infty} \cdot du$$

$$\Leftrightarrow v_{\infty} \cdot \int_{\frac{v_0}{v_{\infty}}}^{\frac{v}{v_{\infty}}} \frac{1}{1+u^2} du = -g \cdot [t']_{t_0}^t$$

$$\Leftrightarrow v_{\infty} \cdot \left[\arctan(u) \right]_{\frac{v_0}{v_{\infty}}}^{\frac{v}{v_{\infty}}} = -gt + \underset{t_0=0}{gt_0}$$

$$\Leftrightarrow v_{\infty} \cdot \arctan\left(\frac{v}{v_{\infty}}\right) = -gt + v_{\infty} \arctan\left(\frac{v_0}{v_{\infty}}\right)$$

$$\Leftrightarrow v(t) = v_{\infty} \cdot \tan\left(-\frac{g \cdot t}{v_{\infty}} + \arctan\left(\frac{v_0}{v_{\infty}}\right)\right)$$



2. Fall: $-v_\infty < v < 0$

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\kappa}{m} \cdot v^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2} = -g dt \Leftrightarrow \int_{v_0}^v \frac{1}{1 - \left(\frac{v'}{v_\infty}\right)^2} dv' = -g \cdot \int_{t_0}^t dt'$$

$$u = \frac{v'}{v_\infty} \leadsto \frac{du}{dv'} = \frac{1}{v_\infty} \Leftrightarrow dv' = v_\infty \cdot du$$

$$\Leftrightarrow v_\infty \cdot \int_{\frac{v_0}{v_\infty}}^{\frac{v}{v_\infty}} \frac{1}{1-u^2} du = -gt + \underbrace{gt_0}_{y_0=0}$$

$$|u| < 1$$

$$\Leftrightarrow v_\infty \cdot \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{v_\infty}\right) = -gt + v_\infty \cdot \operatorname{arctanh}\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$$

$$\Leftrightarrow v(t) = v_\infty \cdot \tanh\left(-\frac{g}{v_\infty} \cdot t + \underbrace{\operatorname{arctanh}\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)}_{\text{mit einem Buchstaben substituieren}}\right)$$

mit einem Buchstaben substituieren

3. Fall: $v < -v_\infty$

Analog 2. Fall bis:

$$|u| > 1$$

$$\Leftrightarrow v_\infty \cdot \operatorname{arcoth}\left(\frac{v}{v_\infty}\right) = -gt + v_\infty \cdot \operatorname{arcoth}\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$$

$$\Leftrightarrow v(t) = v_\infty \cdot \coth\left(-\frac{g}{v_\infty} \cdot t + \underbrace{\operatorname{arcoth}\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)}_{\text{substituieren}}\right)$$

$t \rightarrow \infty$: 1. Fall: nicht def. / 2. Fall: $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -v_\infty$ / 3. Fall: $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -v_\infty$

Skizzen:

