

Zur Physik der Peltonturbine

In Forschung und Entwicklung als auch in der Ausbildung nehmen Modellbildung und Simulation einen immer breiteren Raum ein. Zu recht, denn mit einem gewöhnlichen PC lassen sich heute Vorgänge simulieren, die noch vor zwanzig Jahren von keinem Rechner bewältigt werden konnten. Zum erfolgreichen Modellieren gehört neben dem PC mit geeigneter Simulationssoftware auch ein klares Verständnis der physikalischen Prozesse.

Die in Winterthur entwickelte Systemdynamik, die alle Gebiete der klassischen Physik in ein gemeinsames Schema einbindet, basiert auf drei Grundprinzipien. Gemäss dem ersten Prinzip wird jeder Zweig der Physik von einer mengenartigen oder bilanzierfähigen Grösse (schwere Masse, Volumen, elektrische Ladung, Impuls, Drehimpuls, Entropie oder Stoffmenge) dominiert. Das zweite Prinzip klärt die Rolle der Energie und das dritte formuliert die möglichen Systemeigenschaften.

Am Beispiel der Peltonturbine soll nun gezeigt werden, wie man mit Hilfe von Bilanzgleichungen zu adäquaten Modelldarstellungen kommt. Der aus der Düse austretende Freistrahл habe einen Querschnitt A und eine Geschwindigkeit v . In den Turbinenschaufeln (Geschwindigkeit c) werde das Wasser reibungsfrei um 180° umgelenkt. Bewegt sich die Schaufel nun mit halber Strahlgeschwindigkeit, bleibt das Wasser nach dem Umlenken stehen und fällt bei jeder kinetischen Energie nach unten weg. Folglich nutzt die Peltonturbine die Energie des Wassers optimal, wenn ihre Schaufeln halb so schnell wie der Wasserstrahl sind.

Untersucht man die Kräfte und Leistungen an der Turbinenschaufel, stösst man auf widersprüchliche Resultate. Um die Kraft F , mit der die Schaufel von der Turbine festgehalten wird, zu berechnen, muss eine Impulsbilanz aufgestellt und gelöst werden. Im Gegensatz zum festen Körper, der seinen Impuls nur über die Oberfläche oder über das Gravitationsfeld austauschen kann, treten bei offenen Systemen zusätzlich noch konvektive Transporte auf. Beim konvektiven Strom werden verschiedene Mengen (Masse, Energie, Impuls, Entropie oder Stoffmenge) zusammen mit der Materie transportiert. Die zugehörigen Stromstärken lassen sich als Dichte der Menge mal Volumenstromstärke schreiben. Folglich berechnet sich die Stärke des konvektiven Impulsstromes als Produkt aus Impulsdichte (Massendichte mal Geschwindigkeit) und Volumenstromstärke (Querschnitt mal Strömungsgeschwindigkeit)

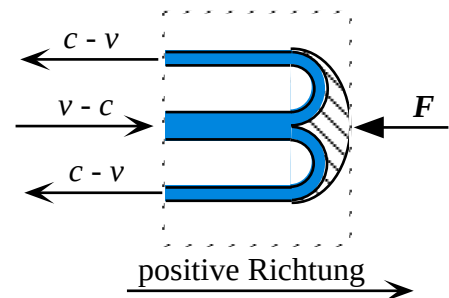


Bild 1: mitbewegtes Bilanzgebiet

$$I_{p,con} = \rho_p \cdot I_V = \rho \cdot v \cdot A \cdot v = \rho \cdot A \cdot v^2 \quad (1)$$

Gemäss Formel (1) wird die konvektive Impulsstromstärke nie negativ. Impuls kann deshalb von der bewegten Materie nur vorwärts transportiert werden. Weitet man die Betrachtung auf ebene oder räumliche Problemstellungen aus, wird die Impulsstromstärke zu einem Vektor

$$I_{\vec{p},con} = \rho_{\vec{p}} \cdot I_V = \rho \cdot \vec{v} \cdot I_V = \vec{v} \cdot I_m \quad (2)$$

Bezüglich eines Systems lassen sich konvektive Impulsstromstärken auch als Kraftpfeile dar-

stellen. Der Kraftpfeil zeigt beim Eintritt (I_m positiv) in Strömungsrichtung und beim Austritt (I_m negativ) gegen den Geschwindigkeitspfeil.

Um den Impuls einfach zu bilanzieren, gehen wir ins mitbewegte System. Wir denken uns also einen Kasten, der die Schaufel dauernd umhüllt (Bild 1). Bezüglich dieses Kastens wird sowohl vom einströmenden als auch von den beiden wegströmenden Teilstrahlen Impuls zugeführt. Dieser Impuls wird unverzüglich über die Schaufel seitwärts abgeleitet. Den leitungsartigen Impulsstrom nennt man Schaufelkraft F . Weil wir die Bilanz im mitbewegten System aufstellen, ist die Strömungsgeschwindigkeit um die Geschwindigkeit der Schaufel reduziert. Zudem muss die Summe über alle Impulsströme gleich Null sein, da sich der Impulsinhalt des Bilanzgebietes nicht ändert. Mit Formel (1) erhalten wir

$$\rho \cdot A \cdot (v - c)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot (c - v)^2 - F = 0 \quad (3)$$

Für die Schaufelkraft erhält man aus (3)

$$F = 2\rho \cdot A \cdot (c - v)^2 \quad (4)$$

Zur Kontrolle stellen wir noch die Impulsbilanz bezüglich eines ruhenden Systems auf (Bild 2). Weil sich die Schaufel nun von der linken Bilanzfläche entfernt, nimmt die eingeschlossene Wassermenge zu. Damit ändert sich auch der Impulsinhalt des Bilanzgebietes. Die Änderungsrate des Impulsinhaltes lässt sich als Impulsdichte mal Änderungsrate des Volumens schreiben, wobei letztere wiederum durch das Produkt aus Strahlquerschnitt mal Schaufelgeschwindigkeit ersetzt werden kann

$$\dot{p} = \rho_p \cdot \dot{V} = \rho \cdot v \cdot A \cdot c \quad (5)$$

Unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten im ein- und austretenden Strahl erhält man für die Impulsbilanz den folgenden Ausdruck

$$\rho \cdot v^2 \cdot A + \rho \cdot (2c - v)^2 \cdot A - F = \rho \cdot v \cdot A \cdot c + \rho \cdot (2c - v) \cdot A \cdot c \quad (6)$$

Links stehen die Impulsströme bezüglich des Bilanzgebietes und rechts die zugehörigen Impulsänderungsraten. Man vergewissere sich, dass aus Formel (6) für die Schaufelkraft der gleiche Ausdruck folgt wie aus Formel (3).

Nun wenden wir uns der Energie zu. Für die Leistung der Schaufelkraft gilt die bekannte Beziehung der Mechanik

$$P(F) = F \cdot c = 2\rho \cdot A \cdot (v - c)^2 \cdot c \quad (7)$$

Die Leistung der Schaufelkraft ist quadratisch in v und kubisch in c . Durch Ableiten nach c und Null setzen findet man das Leistungsmaximum. Überraschenderweise liegt die zugehörige Geschwindigkeit c_{max} nicht wie erwartet bei $v/2$ sondern bei $v/3$. Wie lässt sich dieser Widerspruch zur elementaren Betrachtung von weiter oben erklären?

Als erstes vergleichen wir die maximale Leistung der Schaufelkraft mit der Stromstärke der ki-

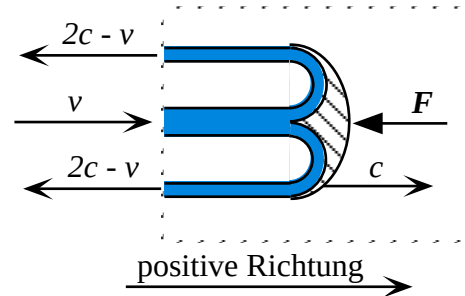


Bild 2: ruhendes Bilanzgebiet

netischen Energie bei der Düse. Für die Leistung der Schaufelkraft erhalten wir mit $c_{max} = v/3$

$$P(F)_{c=\frac{v}{3}} = \frac{8}{27} \rho \cdot A \cdot v^3 \quad (8)$$

Für die kinetische Energie gilt wieder die allgemeine Formel für konvektive Transporte (Energiedichte mal Volumenstromstärke)

$$I_W = \rho_{W,kin} \cdot I_V = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot v = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot v^3 \quad (9)$$

Der Vergleich zeigt, dass die Schaufelleistung 59% der angelieferten Energiestromstärke nicht übersteigen kann. Weil aber das Wasser langsamer auf die Schaufel trifft, als es durch die Düse strömt, erhöht sich die Kontaktzeit. Berechnet man die Schaufelleistung bei der Geschwindigkeit $v/2$, erhält man genau die Hälfte der angelieferten Energiestromstärke. Da die Kontaktzeit für ein gegebenes Stück Wasserstrahl aber doppelt so gross ist wie die Austrittszeit aus der Düse, kann das Wasser dennoch seine ganze kinetische Energie an die Schaufel übertragen.

Zusammenfassen kann gesagt werden, dass die Pelton turbine die Energie des Wassers dann optimal ausnutzt, wenn sich ihre Schaufeln halb so schnell bewegen wie das Wasser ausströmt. Die Leistung der Schaufelkraft ist bei dieser Drehzahl aber nicht maximal. Weil infolge der gedehnten Kontaktzeit gleichzeitig mehr als eine Schaufel angetrieben wird, muss die Leistung der ganzen Turbine und nicht der einzelnen Schaufel optimiert werden.

Interessiert man sich nur für die Leistung der Turbine, ersetzt man die Impulsbilanz am besten durch eine reine Energiebilanz. Das Bilanzgebiet umfasst die Turbine mit Zu- und Abfluss. Die Summe über alle Energieströme (konvektive und Leistungen von Drehmomenten und Kräften) muss gleich der Änderungsrate der Rotationsenergie sein

$$\frac{v^2}{2} I_m - \frac{(v-2c)^2}{2} I_m + P(M) = \dot{W}_{rot} \quad (10)$$

Im Stationärbetrieb ändert sich die kinetische Energie nicht und die Leistung des über die Achse einwirkenden Drehmomentes M ist eine quadratische Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω

$$P(M)_{stationär} = 2 \cdot (c^2 - v \cdot c) \cdot I_m = 2r^2 \cdot I_m \cdot \omega^2 - 2 \frac{r \cdot I_m^2}{\rho \cdot A} \cdot \omega \quad (11)$$

Die Leistung $P(M)$ ist im Arbeitsbereich der Turbine negativ, da die Energie über die Achse wegtransportiert wird. Aus der Energiebilanz lässt sich direkt das dynamische Verhalten der Turbine ableiten

$$2 \cdot (v \cdot c - c^2) \cdot I_m + P(M) = \dot{W}_{rot} \quad (10)$$

mit $c = \omega \cdot r$, $I_m = \rho \cdot A \cdot v$, $P(M) = M \cdot \omega$ und $\dot{W}_{rot} = J \cdot \omega \cdot \dot{\omega}$ folgt

$$\dot{\omega} = \frac{M}{J} + 2 \frac{I_m \cdot r^2}{J} \omega - 2 \frac{I_m^2 \cdot r}{J \cdot \rho \cdot A} \quad (12)$$

Wie eingangs gezeigt, kommt man schon mit einer elementaren Betrachtung zur Erkenntnis, dass sich die Schaufeln der Pelton turbine halb so schnell wie das Wasser bewegen müssen. Aus der Energiebilanz gewinnt man ein vereinfachtes dynamisches Modell für die Turbine. Doch erst die Impulsbilanz liefert eine präzise Darstellung der Turbinendynamik. Nehmen wir zum

Vergleich der beiden Modelle an, dass sich die Turbinenschaufel mit $c=v/3$ dreht. Für diesen Betriebszustand berechnet man mit Formel (11) eine mittlere Turbinenleistung von 89% der maximal möglichen. Die Leistung einer Turbinenschaufel liegt - wie schon erwähnt - bei 59%. Weil sich die Schaufeln vom Strahl wegbewegen, werden während der halben Zeit von einem Strahl zwei Schaufeln gleichzeitig angetrieben. Damit erhöht sich die mittlere Leistung auf den vom vereinfachten Modell gelieferten Wert.

Eine Peltonturbine besitzt 20 bis 40 Schaufeln und steht oft unter der Einwirkung mehrerer Freistrahlen. Zudem werden im Normalbetrieb von jedem Strahl gleichzeitig zwei Schaufeln angetrieben. Deshalb reicht das vereinfachte Modell nach Formel (12) in den meisten Fällen aus. Die Entwicklung im Bereich der Simulationstechnik ermöglicht jedoch eine immer präzisere Nachbildung komplexer Systeme. Wer solch aufwändige Modelle bauen will, kommt um ein widerspruchsfreies Verständnis der physikalischen Wirkprinzipien nicht herum.