Übungen zur Quantenmechanik (12-PHY-BTP2)
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte]

Im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ seien zwei symmetrische Operatoren P und Q gegeben, jeweils mit den Eigenschaften: $D(P) = D(Q) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $PS(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $QS(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sowie

$$[Q, P] = i\eta \mathbf{1} \quad \text{auf } \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

mit einer Konstanten $\eta > 0$. Dabei steht $\mathbf{1}$ für den Einheitsoperator $\mathbf{1} : \phi \mapsto \phi$ auf $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass die Operatoren nicht beschränkt sein können.

Aufgabe 6.2 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte]

Es seien A und B auf einem gemeinsamen dichten Teilbereich eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ definierte Operatoren, deren Kommutator ein Vielfaches von $\mathbf{1}$ ist, d.h. $[A, B] = c\mathbf{1}$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die (formale) Operatoridentität

$$e^{A+B} = e^{-c/2} e^A e^B,$$

wobei die Exponentialfunktionen durch formale Potenzreihenentwicklung definiert sind. (Untersuchen Sie die Ableitung der Operatorfunktion

$$x \mapsto e^{-x(A+B+cx/2)} e^{xA} e^{xB}, \quad x \in \mathbb{R},$$

unter Verwendung der formalen Regeln für Ableitungen von Potenzreihen und deren Produkte. Weisen Sie zuerst nach, dass $[e^A, B] = ce^A$.)

Aufgabe 6.3 [wird nicht korrigiert]

Für eine Menge Y mit Maß μ wird definiert:

$$\text{Erwartungswert von } f \in L^1(Y, d\mu): \quad \langle f \rangle_\mu := \int_Y f d\mu / \int_Y 1 d\mu,$$

$$\text{Mittelwert von } \mu: \quad M_\mu := \langle m \rangle_\mu \text{ mit } m(y) := y,$$

$$\text{Schwankungsquadrat von } \mu: \quad \sigma_\mu^2 := \langle m^2 \rangle_\mu - M_\mu^2.$$

Berechnen Sie den Mittelwert und das Schwankungsquadrat für die folgenden Fälle:

- (1) $Y = \mathbb{R}$, $d\mu(x) = e^{-(x-x_0)^2/2a^2} dx$, wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ Konstanten sind ("Normalverteilung");
- (2) $Y = (0, \infty)$, $d\mu(x) = e^{-\lambda x} dx$ mit einer Konstanten $\lambda > 0$ ("Exponentialverteilung");
- (3) $Y = \mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = \lambda^n/n!$ mit einer Konstanten $\lambda > 0$ ("Poisson-Verteilung").