
Übungen zur Theoretischen Mechanik

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte. Abgabefrist bis Donnerstag, 19.01.2017, vor Beginn der Vorlesung.]

Die Lagrangefunktion eines Massenpunktes der Masse m , der sich in der x - y -Ebene bewegen kann, habe die Form

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \lambda(\dot{x}y - x\dot{y}),$$

wobei $\lambda \neq 0$ eine Konstante ist.

- (a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den Massenpunkt. Ermitteln Sie die Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt. (Wie kann diese Kraft interpretiert werden, wenn angenommen wird, dass der Massenpunkt eine Ladung trägt?)
- (b) Bestimmen Sie die zu x, y kanonisch konjugierten Impulse p_x, p_y . Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Größen und dem üblichen Impuls?
- (c) Untersuchen Sie, welche Symmetrien die Lagrangefunktion besitzt, und bestimmen Sie daraus Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung).
- (d) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion und geben Sie die Hamiltonschen Gleichungen an. Zeigen Sie direkt die Äquivalenz der Euler-Lagrange-Gleichungen zu den Hamiltonschen Gleichungen.

Aufgabe 11.2

[wird nicht korrigiert]

Für eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei f'' ohne Nullstelle, d.h. f' ist invertierbar. Es sei $g(z) = f'^{-1}(z)$ und $f^*(x) = xf'(x) - f(x)$ ($x, z \in \mathbb{R}$). Dann wird die Legendretransformierte von f definiert durch

$$(\mathcal{L}f)(z) = f^*(g(z)) = zg(z) - f(g(z)) \quad (z \in f'(\mathbb{R})).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}(\mathcal{L}f))(y) = f(y)$ gilt.

/...2

- (b) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die C^2 -Funktion $T(q, u) = \frac{1}{2}m(q)u^2$ gegeben, wobei $m(q) > 0$ für alle $q \in \mathbb{R}$. Ausserdem sei $V(q)$ eine beliebige reelle C^2 -Funktion auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie für festgehaltenes q die Legendretransformierte $H(q, p)$, mit $p = \frac{\partial}{\partial u}L(q, u)$, der Funktion

$$u \mapsto L(q, u) = T(q, u) - V(q).$$

Aufgabe 11.3

[wird nicht korrigiert]

Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f$ der Phasenraum eines dynamischen Systems und $(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$ seien die kanonischen Koordinaten, bezgl. derer die Poisson-Klammer $\{g, h\}$ von dynamischen Größen g und h definiert ist.

Es seien $\underline{q}_k(q, p) = q_k$, $\underline{p}_k(q, p) = p_k$ für $k = 1, \dots, f$, $(q, p) \in \mathcal{P}$.

- (a) Berechnen Sie die Poisson-Klammern

$$\{\underline{q}_j, \underline{p}_k\}, \quad \{\underline{q}_k, \underline{q}_j\}, \quad \{\underline{p}_k, \underline{p}_j\} \quad (k, j = 1, \dots, f).$$

- (b) Verifizieren Sie die Jacobi-Identität

$$\{g, \{h, \ell\}\} + \{h, \{\ell, g\}\} + \{\ell, \{g, h\}\} = 0$$

für beliebige dynamische Größen g, h, ℓ .

- (c) Zeigen Sie, dass

$$\{gh, \ell\} = g\{h, \ell\} + h\{g, \ell\}$$

für beliebige dynamische Größen g, h, ℓ gilt.

- (d) Wenn der Phasenraum der eines sich kräftefrei im Raum bewegenden Teilchens ist, so ist die Observable des Drehimpuls (bzgl. $q = 0$) definiert als der Satz von dynamischen Größen ℓ_1, ℓ_3, ℓ_3 , wobei

$$\ell_1(q, p) = q_2p_3 - q_3p_2, \quad \ell_2(q, p) = q_3p_1 - q_1p_3, \quad \ell_3(q, p) = q_1p_2 - q_2p_1.$$

Berechnen Sie die Poisson-Klammern

$$\{\ell_j, \underline{p}_k\} \quad \text{und} \quad \{\ell_j, \underline{q}_k\}$$

und prüfen Sie, welche davon Erhaltungsgrößen sind.